Berichte über die Verhandlung... der Königlich Sächsischen ...

Königlich Sächsische Gesellschaft der ...

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

MIT 2 TAFELN UND 16 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.

INHALT.

Heft		Seite
I	K. Rohn, Ein allgemeiner Satz über doppelt berührende Kegelschnitte, von dem der Steinersche Satz über doppelt berührende Kreise ein Spezialfall ist	2
	Gerhard Kowalewski, Umkehrung einer Transformation und implizite Funktionen	10
	K. Żorawski, Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades. (Zweite Mitteilung)	20
II	C. Neumann, Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. Zweite Abhandlung	53
	Franz Etzold, Neunter Bericht der Erdbebenstation Leipzig. Mit einer Tafel	57
	C. Neumann, Einige Äußerungen C. G. J. Jacobis über die Prinzipien der analytischen Mechanik	80
	S. Garten, Der durch den konstanten Strom im Nerven des Kaltfrosches ausgelöste Erregungsvorgang ist diskontinuierlicher Natur. Mit einer Tafel	85
	Karl Rohn, Das Schließungsproblem von Poncelet und eine gewisse Erweiterung	94
	Martin Krause, Zur Theorie der Gelenksysteme II. Mit 1 Textfigur	132
III	E. v. Meyer, Neue Beiträge zur Kenntnis der dimolekularen Nitrile	146
IV	Heinrich Liebmann, Über die Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes. Mit 1 Figur im Text	176
	W. Fr. Meyer, Über die Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen der Invarianten. Dem Andenken an Sophus Lie gewidmet	190
V	J. E. Lilienfeld, Über neuartige Erscheinungen in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung. Mit 2 Figuren im Text	212
	Franz Etzold, Zehnter Bericht der Erdbebenstation Leipzig	223
	C. Neumann, Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. Dritte Abhandlung	240
	Erich Marx, Über den Einfluß der Röntgenstrahlen auf das Einsetzen der Glimmentladung. Mit 6 Figuren im Text	248
VI	C. Neumann, Über die Entwicklung der ganzen Potenzen der reziproken Entfernung zweier Punkte nach Kugelfunktionen	269
	K. Rohn, Beiträge zur Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades	275

Heft		Seite
VII	Heinrich Liebmann, Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelenpostulat, verbunden mit neuer Begründung der hyperbolischen Geometrie. Mit 6 Figuren im Text	289
	J. Thomae, Parameterdarstellung der Raumkurven vierter Ordnung	306
	Felix Bernstein, Zur Theorie der trigonometrischen Reihe . .	325
VIII	Martin Krause, Nekrolog auf Gustav Zeuner, vorgelegt in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908	339
	O. Hölder, Nekrolog auf Adolph Mayer, gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908	353
	C. Neumann, Nekrolog auf Wilhelm Scheibner, gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908	375
	Verzeichnis der Mitglieder der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften	I
	Verzeichnis der eingegangenen Schriften	VII

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

MIT EINER TAFEL.

I.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1908.

Einzelpreis 2 Mark 50 Pfg.

SITZUNG VOM 13. JANUAR 1908.

Herr Hölder legt für die Berichte eine Arbeit von Prof. Kowalewski vor: „Umkehrung einer Transformation und implizite Funktionen".

Herr Rohn übergibt für die Berichte eine zweite Mitteilung von Herrn Żorawski: „Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades".

Herr Rohn übergibt für die Berichte seine Arbeit: „Ein allgemeiner Satz über doppelt berührende Kegelschnitte".

Derselbe meldet einen Aufsatz über das Schlußproblem an.

Herr Credner legt für die Berichte die Fortsetzung der seismometrischen Beobachtungen von Dr. Etzold nebst einer Tafel vor.

Die Klasse bewilligt Herrn Correns aus der Mende-Stiftung 700 Mark zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über Bastardierung bei Pflanzen.

Geschäftliche Mitteilungen.

Ein allgemeiner Satz über doppelt berührende Kegelschnitte, von dem der Steinersche Satz über doppelt berührende Kreise ein Spezialfall ist.

Von

K. Rohn.

Steiner behandelt in einem Aufsatze: Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte[1]), die Beziehungen eines Kegelschnittes zu seinen doppelt berührenden Kreisen. Er spricht daselbst[2]) folgenden Satz aus: „Zieht man aus den Brennpunkten F und F_1 nach allen Tangenten des Kegelschnittes K Strahlen unter demselben beliebigen Winkel φ, so liegen ihre Fußpunkte allemal auf einem den Kegelschnitt K doppelt berührenden Kreise Q."

Dieser Satz erscheint als Spezialfall eines weit allgemeineren Satzes, der nach mancher Richtung bemerkenswert ist und sich etwa in der folgenden Weise formulieren läßt. *Sind φ und ψ irgend zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte, ist i ihre gemeinsame Berührungssehne und k eine beliebige Gerade; legt man ferner aus einem Punkte P von k die beiden Tangenten an ψ, so schneiden sie φ in vier Punkten, deren vier Verbindungslinien die folgenden charakteristischen Eigenschaften besitzen, falls man P sich auf k fortbewegen läßt. Zwei der vier Verbindungslinien schneiden sich beständig auf i und umhüllen einen Kegelschnitt χ, der seinerseits φ in seinen Schnittpunkten mit k berührt. Die beiden anderen Verbindungslinien gehen beständig durch je einen festen Punkt; ihr Schnittpunkt bewegt sich auf einem Kegelschnitt ω, dem auch die beiden festen Punkte angehören, die außerdem auf einem Strahl durch den Punkt $i \times k$ liegen. Der*

1) Crelles Journal Bd. XXXVII p. 161—192, oder: Jakob Steiners Gesammelte Werke Bd. II p. 391 u. ff.

2) a. a. O. p. 406.

Kegelschnitt ω geht durch die Schnittpunkte von i und k mit φ und durch ihre Pole J und K in bezug auf φ.

Um den Beweis für diesen Satz zu erbringen, treffe ich zunächst die folgenden Festsetzungen. Die Variabeln bezeichne ich mit $x_0 y_0 z_0$, die Koordinaten der willkürlichen Punkte J und K mit $x_i y_i z_i$ bzw. $x_k y_k z_k$. Die Gleichung des Kegelschnittes φ kann man dann kurz: $\varphi_{00} = 0$ schreiben, während:

$\varphi_{0i} = 0$ die Polare des Punktes J, also die Gerade i, und

$\varphi_{0k} = 0$ die Polare des Punktes K, also die Gerade k darstellt.

$\omega_{00} \equiv \varphi_{00}\varphi_{ik} - \varphi_{0i}\varphi_{0k} = 0$ ist die Gleichung des Kegelschnittes ω, denn er geht durch die Schnittpunkte von φ mit den Geraden i und k, sowie durch die Punkte J und K.

$\psi_{00} \equiv \varphi_{00} - \varrho\varphi_{0i}^2 = 0$ ist ein Kegelschnitt, der φ in den Schnittpunkten mit i berührt.

Wir wählen jetzt einen beliebigen Punkt P_1 auf k; seine Polare in bezug auf φ wird die Gerade i in einem Punkte P_2 schneiden; P_1 und P_2 werden von einem Punkte P_3 zu einem Polardreieck von φ ergänzt. Dann gelten die folgenden fünf Relationen:

$$\varphi_{1k} = 0, \quad \varphi_{2i} = 0, \quad \varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{23} = 0, \quad \varphi_{13} = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes φ läßt sich dann in der Form schreiben:

$$\varphi_{00} \equiv \frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}} + \frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}} + \frac{\varphi_{03}^2}{\varphi_{33}} = 0;$$

denn beide Ausdrücke stimmen für die Punkte P_1, P_2, P_3 überein, ebenso hinsichtlich ihren Polaren in bezug auf jeden dieser drei Punkte. Daraus folgt:

$$\varphi_{ii} \equiv \frac{\varphi_{i1}^2}{\varphi_{11}} + \frac{\varphi_{i3}^2}{\varphi_{33}}, \quad \varphi_{kk} \equiv \frac{\varphi_{k2}^2}{\varphi_{22}} + \frac{\varphi_{k3}^2}{\varphi_{33}},$$

$$\varphi_{0i} \equiv \frac{\varphi_{01}\varphi_{i1}}{\varphi_{11}} + \frac{\varphi_{03}\varphi_{i3}}{\varphi_{33}}, \quad \varphi_{0k} \equiv \frac{\varphi_{02}\varphi_{k2}}{\varphi_{22}} + \frac{\varphi_{03}\varphi_{k3}}{\varphi_{33}},$$

$$\varphi_{ik} \equiv \frac{\varphi_{i3}\varphi_{k3}}{\varphi_{33}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß $\omega_{33} = 0$ ist; der Punkt P_3 liegt also auf dem Kegelschnitt ω ganz unabhängig davon, wie der Punkt P_1 gewählt war.

Das Tangentenpaar aus dem Punkt P_1 an den Kegelschnitt ψ hat die Gleichung:

$$\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}^2 = 0,$$

oder:

$$(\varphi_{00} - \varrho\varphi_{0i}^2)(\varphi_{11} - \varrho\varphi_{1i}^2) - (\varphi_{01} - \varrho\varphi_{0i}\varphi_{1i})^2 = 0.$$

Führt man hier für φ_{00} und φ_{0i} die obigen Werte ein, so ergibt sich:

$$\alpha_{00} \equiv \frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}}\left(1 - \varrho\frac{\varphi_{1i}^2}{\varphi_{11}}\right) + \frac{\varphi_{03}^2}{\varphi_{33}}(1 - \varrho\varphi_{ii}) = 0$$

als Gleichung des Tangentenpaares aus dem Punkte P_1 an den Kegelschnitt ψ.

Das Tangentenpaar: $\alpha_{00} = 0$ bestimmt zusammen mit dem Kegelschnitt $\varphi_{00} = 0$ einen Büschel, dem zwei weitere Geradenpaare angehören, nämlich:

$$\beta_{00} \equiv \frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}}\left(1 - \varrho\frac{\varphi_{1i}^2}{\varphi_{11}}\right) + \varrho\frac{\varphi_{03}^2}{\varphi_{33}} \cdot \frac{\varphi_{3i}^2}{\varphi_{33}} = 0,$$

und:

$$\gamma_{00} \equiv \frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}}(1 - \varrho\varphi_{ii}) - \varrho\frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}} \cdot \frac{\varphi_{3i}^2}{\varphi_{33}} = 0.$$

Das erstere Geradenpaar hat seinen Scheitel im Punkte $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{03} = 0$, d. h. im Punkte P_2 auf der Geraden i. Das letztere Geradenpaar hat seinen Scheitel im Punkte $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = 0$, d. h. im Punkte P_3 auf dem Kegelschnitt ω.

Die Bedeutung des Geradenpaares $\beta_{00} = 0$ geht aber aus folgender Überlegung hervor. Wir betrachten einen Kegelschnitt χ, der φ in seinen Schnittpunkten mit k doppelt berührt; seine Gleichung ist:

$$\chi_{00} \equiv \varphi_{00} - \sigma\varphi_{0k}^2 = 0.$$

Das Tangentenpaar aus dem Punkte P_2 gezogen an den Kegelschnitt χ wird:

$$\chi_{00}\chi_{22} - \chi_{02}^2 = 0,$$

oder:

$$(\varphi_{00} - \sigma\varphi_{0k}^2)(\varphi_{22} - \sigma\varphi_{2k}^2) - (\varphi_{02} - \sigma\varphi_{0k}\varphi_{2k})^2 = 0,$$

oder wenn man wieder die Relationen für φ_{00} und φ_{0k} berücksichtigt:

$$\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}}\left(1 - \sigma\frac{\varphi_{2k}^2}{\varphi_{22}}\right) + \frac{\varphi_{03}^2}{\varphi_{33}}(1 - \sigma\varphi_{kk}) = 0.$$

Dieses Tangentenpaar wird aber mit dem Geradenpaar $\beta_{00} = 0$ identisch, wenn man:

$$\left(1 - \varrho\frac{\varphi_{1i}^2}{\varphi_{11}}\right)(1 - \sigma\varphi_{kk}) - \varrho\frac{\varphi_{3i}^2}{\varphi_{33}}\left(1 - \sigma\frac{\varphi_{2k}^2}{\varphi_{22}}\right) = 0 \quad \text{setzt.}$$

Diese Gleichung schreibt sich auch:

$$1 - \varrho\varphi_{ii} - \sigma\varphi_{kk} + \varrho\sigma(\varphi_{ii}\varphi_{kk} - \varphi_{ik}^2) = 0;$$

sie ist wie wir sehen ganz unabhängig von der Wahl der Punkte $P_1 P_2 P_3$. Wählt man also σ gemäß der vorstehenden Bedingungsgleichung, so hat der Kegelschnitt χ die sämtlichen Geradenpaare $\beta_{00} = 0$ zu Tangenten ganz einerlei wie man den Punkt P_1 auf der Geraden k annehmen mag.

Die Bedeutung des Geradenpaares $\gamma_{00} = 0$ ist nicht so unmittelbar zu erkennen. Offenbar kann man es mit Rücksicht auf die Relation zwischen ϱ und σ auch durch die Gleichung:

$$\frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}}(1 - \sigma\varphi_{kk}) - \sigma\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}}\frac{\varphi_{3k}^2}{\varphi_{33}} = 0 \quad \text{darstellen.}$$

Wir legen nun durch den Schnittpunkt der Geraden i und k einen beliebigen Strahl l; seine Gleichung ist:

$$\varphi_{0i} - \tau\varphi_{0k} = 0,$$

oder:

$$\frac{\varphi_{01}}{\varphi_{11}}\varphi_{i1} - \tau\frac{\varphi_{02}}{\varphi_{22}}\varphi_{k2} + \frac{\varphi_{03}}{\varphi_{33}}(\varphi_{i3} - \tau\varphi_{k3}) = 0.$$

Ferner hat die Tangente t von ω im Punkte P_3 die Gleichung:

$$2\varphi_{03}\varphi_{ik} - \varphi_{0i}\varphi_{3k} - \varphi_{0k}\varphi_{3i} = 0,$$

oder:

$$\frac{\varphi_{01}}{\varphi_{11}}\varphi_{i1}\varphi_{k3} + \frac{\varphi_{02}}{\varphi_{22}}\varphi_{i3}\varphi_{k2} = 0.$$

Die beiden Geraden l und t zusammen genügen der Gleichung:

$$0 = \frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}^2}\varphi_{i1}^2\varphi_{k3} - \frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}^2}\tau\varphi_{k2}^2\varphi_{i3}$$
$$+ \left\{\frac{\varphi_{01}\varphi_{02}}{\varphi_{11}\varphi_{22}}\varphi_{i1}\varphi_{k2} + \frac{\varphi_{02}\varphi_{03}}{\varphi_{22}\varphi_{33}}\varphi_{i3}\varphi_{k2} + \frac{\varphi_{01}\varphi_{03}}{\varphi_{11}\varphi_{33}}\varphi_{i1}\varphi_{k3}\right\}(\varphi_{i3} - \tau\varphi_{k3}).$$

Die Gleichung:

$$\omega_{00} \equiv \varphi_{00}\varphi_{ik} - \varphi_{0i}\varphi_{0k} = 0$$

geht, falls man $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}$ einführt, über in:

$$\omega_{00} \equiv \left(\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}} + \frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}}\right)\varphi_{ik}$$
$$- \left\{\frac{\varphi_{01}\varphi_{02}}{\varphi_{11}\varphi_{22}}\varphi_{i1}\varphi_{k2} + \frac{\varphi_{02}\varphi_{03}}{\varphi_{22}\varphi_{33}}\varphi_{i3}\varphi_{k2} + \frac{\varphi_{01}\varphi_{03}}{\varphi_{11}\varphi_{33}}\varphi_{i1}\varphi_{k3}\right\} = 0.$$

Der Kegelschnitt ω und das Geradenpaar $l \cdot t$ bestimmen einen Büschel, dem auch das Geradenpaar angehört, das seinen Scheitel in P_3 hat und durch die Schnittpunkte von ω und l hindurchgeht. Die Gleichung des letztgenannten Geradenpaares kann φ_{03} nicht enthalten; man

multipliziere also die letztere Gleichung mit $(\varphi_{i3} - \tau\varphi_{k3})$ und addiere sie zu ersteren, so erhält man als Darstellung dieses Geradenpaares:

$$\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}}\left\{\frac{\varphi_{i1}^2\varphi_{k3}}{\varphi_{11}} + \varphi_{ik}\varphi_{i3} - \tau\varphi_{ik}\varphi_{k3}\right\}$$

$$- \frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}}\left\{\tau\frac{\varphi_{k2}^2\varphi_{i3}}{\varphi_{22}} - \varphi_{ik}\varphi_{i3} + \tau\varphi_{ik}\varphi_{k3}\right\} = 0$$

oder:

$$\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{11}}\varphi_{k3}\{\varphi_{ii} - \tau\varphi_{ik}\} + \frac{\varphi_{02}^2}{\varphi_{22}}\varphi_{i3}\{\varphi_{ik} - \tau\varphi_{kk}\} = 0.$$

Die Gleichung des Geradenpaares $\gamma_{00} = 0$ stimmt mit dieser überein wenn man:

$$\frac{\varphi_{ii} - \tau\varphi_{ik}}{\varphi_{ik} - \tau\varphi_{kk}} = -\frac{1 - \varrho\varphi_{ii}}{\varrho\varphi_{ik}},$$

oder:

$$\tau = \frac{\varphi_{ik}}{\varphi_{kk} - \varrho(\varphi_{ii}\varphi_{kk} - \varphi_{ik}^2)} = \frac{\sigma\varphi_{ik}}{1 - \varrho\varphi_{ii}} = \frac{\varrho\varphi_{ik}}{1 - \sigma\varphi_{kk}}$$

setzt.

Auch dieser Wert von τ ist ganz unabhängig von der Lage der Punkte P_1, P_2, P_3. Das Geradenpaar $\gamma_{00} = 0$ geht also beständig durch die Schnittpunkte von $\omega_{00} = 0$ mit der Geraden $\varphi_{0i} - \tau\varphi_{0k} = 0$; sein Scheitel P_3 wandert auf dem Kegelschnitt $\omega_{00} = 0$, wenn sich der Punkt P_1 auf der Geraden $\varphi_{0k} = 0$ fortbewegt. Damit ist aber unser Satz vollständig bewiesen.

Die Gerade i möge den Kegelschnitt φ in den Punkten J' und J'' schneiden, ebenso möge ihn die Gerade k in den Punkten K' und K'' schneiden; diese vier Punkte auf φ sind völlig beliebig. Der Kegelschnitt ω geht durch J', J'', K', K'' und die Punkte J, K hindurch; letztere sind die Pole von i und k in bezug auf φ. Zugleich ist ω der Ort aller Punkte, deren Polaren in bezug auf φ die Geraden i und k in konjugierten Polen von φ schneiden. Die Kegelschnitte ψ bzw. χ berühren φ in den Punkten J', J'' bzw. K', K''; durch die Wahl des einen ist der andere mitbestimmt. Diese Wahl bestimmt auch die Punkte L' und L'' auf ω, deren Verbindungslinie l durch den Punkt $i \times k$ geht. Nach unserem Satz berühren die Verbindungslinien von J' und J'' mit L' und L'' den Kegelschnitt χ; in gleicher Weise berühren die Verbindungslinie von K' und K'' mit L' und L'' den Kegelschnitt ψ.

Man kann dem vorher bewiesenen Satz auch die folgende Fassung geben. Es sei ω ein Kegelschnitt, S ein beliebiger Punkt und s seine Polare, die ω in den Punkten J und K schneide; es seien

ferner i, k, l drei beliebige Gerade durch S und J', J'' bzw. K', K'' bzw. L', L'' ihre Schnittpunkte mit ω. Dann gibt es einen Kegelschnitt φ, der die Geraden $J'J$, $J''J$, $K'K$, $K''K$ beziehungsweise in J', J'', K', K'' berührt, und außerdem zwei Kegelschnitte ψ und χ, die φ in J', J'' bzw. K', K'' berühren und zugleich die Geraden $K'L'$, $K'L''$, $K''L'$, $K''L''$ bzw. $J'L'$, $J'L''$, $J''L'$, $J''L''$ zu Tangenten haben. Zieht man nun aus einem beliebigen Punkt P von ω zwei Strahlen nach L' und L'', so schneiden sie φ in vier Punkten derart, daß zwei ihrer Verbindungslinien sich auf i schneiden und χ berühren, während die beiden andern sich auf k schneiden und ψ berühren.

Man hat hier also eine Art Schließungsproblem. Es gibt unendlich viele Vierecke die φ einbeschrieben sind, während ein Gegenseitenpaar den Kegelschnitt ψ und das andere den Kegelschnitt χ berührt; das dritte geht dabei durch ein festes Punktepaar. Man kann dieses Schließungsproblem auch folgendermaßen aussprechen.

Wird ein Kegelschnitt φ von zwei Kegelschnitten ψ und χ je zweimal berührt, und existiert ein φ eingeschriebenes Viereck, das mit je zwei Gegenseiten die Kegelschnitte ψ und χ berührt, so gibt es unendlich viele solche Vierecke. Das dritte Paar Gegenseiten aller Vierecke geht durch zwei feste Punkte. Ihre drei Diagonalpunkte verteilen sich auf die beiden Berührungssehnen und einen Kegelschnitt ω, der durch die Endpunkte der Berührungssehnen und die beiden festen Punkte hindurchgeht.

Es mag hier auch noch der duale Satz ausgesprochen werden. Sind φ und ψ irgend zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte, ist i ihre gemeinsame Berührungssehne und J der zugehörige Pol, ist ferner K ein beliebiger Punkt und k seine Polare in bezug auf φ; legt man nun durch K einen Strahl p und durch seine Schnittpunkte mit ψ die vier Tangenten an φ, dann besitzen die vier Schnittpunkte dieser Tangenten die folgenden charakteristischen Eigenschaften, falls man p sich um K drehen läßt. Zwei der vier Schnittpunkte liegen beständig auf einer Geraden durch J und gehören einem Kegelschnitt χ an, der seinerseits φ in seinen Schnittpunkten mit k berührt. Die beiden andern Schnittpunkte liegen beständig auf zwei festen Geraden, ihre Verbindungslinie umhüllt einen Kegelschnitt ω, der auch die beiden festen Geraden berührt, deren Schnittpunkt außerdem auf JK liegt. Der Kegelschnitt ω berührt zudem die Geraden i und k sowie die vier aus J und K an φ gelegten Tangenten.

Um aus dem hier nachgewiesenen Satze den anfangs zitierten Steinerschen Satz zu gewinnen, machen wir die folgenden Annahmen. Es sei ψ ein beliebiger Kegelschnitt, φ ein ihn doppelt (von außen) berührender Kreis, J' und J'' seien die Berührungspunkte; ferner sei k die unendlich ferne Gerade. Irgend zwei parallele Tangenten von ψ schneiden den Kreis φ in vier Punkten von folgenden Eigenschaften. Zwei ihrer Verbindungslinien schneiden sich auf $J'J''$ und berühren einen bestimmten zu φ konzentrischen Kreis χ; denn χ und φ berühren sich in ihren unendlich fernen Punkten. Die beiden andern Verbindungslinien gehen durch zwei feste Punkte L' und L'' und schneiden sich beständig auf einem festen Kreis ω. Der Kreis ω geht durch J', J'', L', L'', den Mittelpunkt des Kreises φ und den Schnittpunkt der Tangenten in J' und J''. Nun schneiden sich die Tangenten gezogen von den unendlich fernen Kreispunkten an den Kegelschnitt ψ in seinem Brennpunkte; nach unserem Satz sind dies aber die Punkte L' und L''. Die letzterwähnten beiden Verbindungslinien gehen sonach beständig durch die beiden Brennpunkte von ψ und schneiden sich auf dem Kreis ω, d. h. sie schließen einen konstanten Winkel ε miteinander und den Winkel $\frac{\pi - \varepsilon}{2}$ mit den betr. Tangenten von ψ ein, da sie ja gegen diese gleich geneigt sind.

Durch Anwendung des dualen Satzes erhält man folgendes Resultat. Es sei ψ ein beliebiger Kegelschnitt, φ ein ihn doppelt (von innen) berührender Kreis, J' und J'' seien die Berührungspunkte, sowie J der zu $i = J'J''$ gehörige Pol; ferner sei k die unendlich ferne Gerade und K der Mittelpunkt von φ. Legt man nun durch K einen beliebigen Strahl und durch seine Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt ψ die vier Tangenten an den Kreis φ, so schneiden sich diese in vier Punkten von folgenden Eigenschaften. Zwei von ihnen liegen auf einem Kreise χ mit dem Mittelpunkt K, ihre Verbindungslinie geht durch J. Die beiden andern liegen auf zwei festen Geraden l' und l'' und ihre Verbindungslinien umhüllen eine Parabel ω, die K zum Brennpunkt und i zur Scheiteltangente hat. Die beiden festen Geraden schneiden den Kreis χ in denselben vier Punkten wie die beiden Tangenten von ψ in J' und J''; diese Tangenten wie jene Geraden berühren die Parabel ω. Legt man aus den Endpunkten der Achse von ψ, die durch J und K geht, die vier Tangenten an den Kreis φ, so liegen von ihren vier Schnittpunkten zwei auf i und gehören den beiden festen Geraden an,

während die andern zwei auf dem Kreis χ liegen und einer Geraden, die in J auf der Achse senkrecht steht.

Von dem allgemeinen Satze kann man allerlei spezielle Anwendungen machen; ich möchte hier nur die folgende erwähnen. Sind φ und ψ zwei koaxiale ähnliche Kegelschnitte, sind ferner J', J'' zwei Punkte von φ und gehört zu $J'J'' = i$ der Pol J, so erhält man zwei Punkte L' und L'' als Schnittpunkte der von J' und J'' an ψ gelegten Tangenten (in L' schneiden sich zwei durch stetige Bewegung ineinander überführbare Tangenten, ebenso in L''). Je zwei aus einem Punkte von i an ψ gelegte Tangenten treffen φ in vier Punkten, so daß zwei ihrer Verbindungslinien einen Kegelschnitt χ umhüllen, der φ in J' und J'' berührt. Ihre beiden andern Verbindungslinien gehen durch L' und L'' und schneiden sich auf einem Kegelschnitt ω; dieser ist zu φ ähnlich und ähnlich gelegen und geht durch J, J', J'', L', L'' und den Mittelpunkt von φ. Auch ein dualer Satz läßt sich für zwei derartige Kegelschnitte φ und ψ leicht aussprechen.

Druckfertig erklärt 10. II. 1908.]

Umkehrung einer Transformation und implizite Funktionen.

Von

GERHARD KOWALEWSKI.

Daß sich unter gewissen Voraussetzungen eine Transformation umkehren läßt, beweist man gewöhnlich, indem man von dem Existenztheorem der impliziten Funktionen ausgeht.[1]) Die vorliegende Arbeit schlägt den entgegengesetzten Weg ein. Es wird zuerst die Existenz der inversen Transformation bewiesen, und hieraus folgt dann durch Spezialisierung das Existenztheorem der impliziten Funktionen.

Die Betrachtungen sind im folgenden nur für den Fall von zwei Veränderlichen durchgeführt, damit das Wesentliche des Verfahrens deutlicher hervortritt. Sie gelten in genau entsprechender Form für jede endliche Anzahl von Veränderlichen.

Veränderliche und Funktionen sind hier durchweg reell.

§ 1.

Rekapitulation einiger Hilfssätze.

1. $f(x, y)$ habe in dem Rechteck R, das in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten durch

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

definiert ist, die Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x, y), \frac{\partial f}{\partial y} = f_2(x, y).$$

---

1) Vgl. z. B. das neue Lehrbuch der Funktionentheorie von OSGOOD Bd. 1, S. 47—56. Einen sehr eleganten Existenzbeweis der impliziten Funktionen, bei welchem diese durch einen Iterationsprozeß wirklich hergestellt werden, gab Herr H. A. SCHWARZ (Berliner Berichte, 1897, S. 948 ff.).

Diese Ableitungen mögen in R ausnahmslos stetig sein. Sind dann (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei beliebige Punkte in R, so gilt, wie man in der Differentialrechnung beweist, die Formel[1])

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) =$$
$$(x_2 - x_1) f_1(x, y) + (y_2 - y_1) f_2(x, y).$$

Dabei liegt der Punkt (x, y) auf der Verbindungsstrecke von (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

Man sieht aus dieser Formel auch, daß $f(x, y)$ in R stetig ist.

2. Wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ in R stetig ist, so gibt es unter ihren Werten einen größten und einen kleinsten (Satz von Weierstrass).

Man kann hierfür folgenden einfachen Beweis geben, der die Begriffe obere und untere Grenze nicht benutzt.

Das durch

$$\bar{a} \leqq x \leqq \bar{b}, \quad \bar{c} \leqq y \leqq \bar{d}$$

definierte Rechteck $\bar{R}$ möge in R enthalten sein. Wir nennen $\bar{R}$ einen *ausgezeichneten* Teil von R, wenn es in R keinen Funktionswert gibt, der alle Funktionswerte in $\bar{R}$ übertrifft.

Teilt man R, indem man die Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbindet, in vier Teile, so ist, wie man leicht erkennt, wenigstens einer von ihnen, R_1, ein ausgezeichneter. In R_1 gibt es dann wieder ein ausgezeichnetes Viertel R_2 usw. Die so erhaltenen Rechtecke $R_1, R_2, \ldots$ konvergieren auf einen Punkt (ξ, η), und es stellt sich heraus, daß in R kein größerer Funktionswert als $\varphi(\xi, \eta)$ vorhanden ist. Wäre etwa $\varphi(x_0, y_0) > \varphi(\xi, \eta)$, so bedenke man, daß es in R_1 einen Punkt (x_1, y_1) geben muß, so daß $\varphi(x_1, y_1) \geqq \varphi(x_0, y_0)$, in R_2 einen Punkt (x_2, y_2), so daß $\varphi(x_2, y_2) \geqq \varphi(x_1, y_1)$, usw. In jedem Rechteck R_n hätten wir also einen Punkt (x_n, y_n), und es beständen die Ungleichungen

$$\varphi(x_0, y_0) \leqq \varphi(x_1, y_1) \leqq \varphi(x_2, y_2) \leqq \ldots.$$

Da aber $\lim x_n = \xi$, $\lim y_n = \eta$ und wegen der Stetigkeit $\lim \varphi(x_n, y_n) = \varphi(\xi, \eta)$ ist, so wäre $\varphi(x_0, y_0) \leqq \varphi(\xi, \eta)$, gegen die Voraussetzung.

Durch Anwendung der obigen Betrachtungen auf $-\varphi(x, y)$ erkennt man, daß φ in R auch einen kleinsten Wert hat.

Setzt man $c = d$, so erhält man den Weierstrassschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen.

---

1) Vgl. Osgoods Funktionentheorie, Bd. I, S. 46.

§ 2.

Umkehrung einer Transformation.

Wir nehmen an, daß die Funktionen $v(x, y)$, $w(x, y)$ in einer gewissen Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) stetige erste Ableitungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_1(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_2(x, y),$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_1(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = w_2(x, y)$$

besitzen, und daß die Funktionaldeterminante von v und w im Punkte (x_0, y_0) nicht verschwindet, daß also

$$v_1(x_0, y_0)\, w_2(x_0, y_0) - v_2(x_0, y_0)\, w_1(x_0, y_0) \gtrless 0$$

ist.

Zunächst zeigen wir, daß unter den angegebenen Voraussetzungen folgender Satz gilt:

Satz 1. *Um (x_0, y_0) läßt sich ein Quadrat*

$$(Q) \qquad \begin{cases} x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon, \\ y_0 - \varepsilon \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon \end{cases}$$

konstruieren derart, daß immer

$$\begin{vmatrix} v_1(x, y), & v_2(x, y) \\ w_1(\bar{x}, \bar{y}), & w_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, wie man auch die Punkte (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ in Q wählen mag.

Dies folgt sofort aus der Stetigkeit von v_1, v_2, w_1, w_2. Angenommen, es gäbe kein solches Quadrat Q. Dann würde auch das der Annahme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ entsprechende Quadrat Q_n die gewünschte Eigenschaft nicht haben.[1])

Es müßte also in Q_n zwei Punkte

$$(x_n, y_n),\ (\bar{x}_n, \bar{y}_n)$$

geben derart, daß

$$\begin{vmatrix} v_1(x_n, y_n), & v_2(x_n, y_n) \\ w_1(\bar{x}_n, \bar{y}_n), & w_2(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \end{vmatrix} = 0$$

1) n ist eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., aber so groß, daß Q_n ganz in U liegt.

ist. Lassen wir n unbegrenzt wachsen, so konvergieren die zwei Punkte nach (x_0, y_0) und wegen der Stetigkeit ergibt sich

$$0 = \lim \begin{vmatrix} v_1(x_n, y_n), & v_2(x_n, y_n) \\ w_1(\bar{x}_n, \bar{y}_n), & w_2(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1(x_0, y_0), & v_2(x_0, y_0) \\ w_1(x_0, y_0), & w_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Wir haben aber gerade angenommen, daß diese Determinante ungleich Null ist.

Betrachten wir jetzt die Transformation

$$(T) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = v(x, y), \\ \mathfrak{y} = w(x, y). \end{cases}$$

x und y sollen rechtwinklige cartesische Punktkoordinaten in einer Ebene sein, ebenso $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in einer andern Ebene. Durch T wird dann jedem in U liegenden Punkt (x, y) der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zugeordnet, dessen Koordinaten gleich $v(x, y)$ bzw. $w(x, y)$ sind. Dieser Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ möge der Bildpunkt von (x, y) heißen.

Satz 2. Verschiedenen Punkten des Quadrats Q entsprechen stets verschiedene Bildpunkte.

Haben die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in Q denselben Bildpunkt, so ist

$$v(x_2, y_2) - v(x_1, y_1) = 0,$$
$$w(x_2, y_2) - w(x_1, y_1) = 0,$$

also nach Nr. 1 des § 1

$$(x_2 - x_1)\, v_1(x, y) + (y_2 - y_1)\, v_2(x, y) = 0,$$
$$(x_2 - x_1)\, w_1(\bar{x}, \bar{y}) + (y_2 - y_1)\, w_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Dabei sind (x, y) und $(\bar{x}, \bar{y})$ Punkte auf der Verbindungsstrecke von (x_1, y_1) und (x_2, y_2), mithin sicher Punkte von Q. Also ist nach Satz 1 die Determinante der obigen Gleichungen ungleich Null, und es folgt

$$x_2 - x_1 = 0, \quad y_2 - y_1 = 0.$$

Wir wollen nunmehr mit $\mathfrak{B}$ den Inbegriff der Bildpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bezeichnen, die den Punkten von Q entsprechen. Ferner möge $\hat{Q}$ der Inbegriff der Randpunkte von Q sein und $\hat{\mathfrak{B}}$ der Inbegriff ihrer Bildpunkte. $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ sei der Bildpunkt von (x_0, y_0).

Bilden wir die Funktion

$$\{v(x, y) - \mathfrak{x}_0\}^2 + \{w(x, y) - \mathfrak{y}_0\}^2,$$

so ist sie in Q stetig, also auch in $\hat{Q}$. Sie hat in $\hat{Q}$ einen kleinsten Wert[1]) m^2, der nicht null ist. Wäre nämlich $m = 0$, so gäbe es auf dem Rande von Q einen Punkt, der denselben Bildpunkt $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ hat wie der Mittelpunkt (x_0, y_0) von Q. Das ist aber nach Satz 2 ausgeschlossen.

m ist offenbar der kürzeste Weg von $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ nach $\hat{\mathfrak{B}}$. Beschreiben wir um $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ einen Kreis mit dem Radius m, so liegt innerhalb dieses Kreises kein Punkt von $\hat{\mathfrak{B}}$.

$(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ sei nun ein Punkt, der von $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ höchstens um $\frac{m}{2}$ entfernt ist. Dann liegt $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ ebenso nahe oder näher an $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ als an irgend einem Punkte von $\hat{\mathfrak{B}}$. Wenn also $(\hat{x}, \hat{y})$ ein beliebiger Punkt von $\hat{Q}$ ist, so wird die folgende Ungleichung gelten:

$$\{v(\hat{x}, \hat{y}) - \mathfrak{x}'\}^2 + \{w(\hat{x}, \hat{y}) - \mathfrak{y}'\}^2 \geqq$$
$$\{v(x_0, y_0) - \mathfrak{x}'\}^2 + \{w(x_0, y_0) - \mathfrak{y}'\}^2.$$

Sie lehrt uns, daß die Funktion

$$\omega(x, y) = \{v(x, y) - \mathfrak{x}'\}^2 + \{w(x, y) - \mathfrak{y}'\}^2$$

auf dem Rande von Q nicht kleiner wird als sie im Mittelpunkt von Q ist. Betrachten wir daher den kleinsten Wert, den ω in Q erreicht[2]), so können wir sicher sein, daß er an einer Stelle (x', y') *im Innern* von Q angenommen wird. An dieser Stelle müssen aber die Ableitungen $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$ verschwinden, d. h. es muß sein

$$\{v(x', y') - \mathfrak{x}'\} v_1(x', y') + \{w(x', y') - \mathfrak{y}'\} w_1(x', y') = 0,$$
$$\{v(x', y') - \mathfrak{x}'\} v_2(x', y') + \{w(x', y') - \mathfrak{y}'\} w_2(x', y') = 0.$$

Da nach Satz 1

$$\begin{vmatrix} v_1(x', y'), & w_1(x', y') \\ v_2(x', y'), & w_2(x', y') \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, so folgt

$$v(x', y') - \mathfrak{x}' = 0, \quad w(x', y') - \mathfrak{y}' = 0,$$

d. h. $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ ist der Bildpunkt von (x', y'), gehört also zu $\mathfrak{B}$.

1) Auf jeder Seite des Quadrats haben wir es mit einer stetigen Funktion einer Veränderlichen zu tun und können den WEIERSTRASSschen Satz anwenden.

2) Nach No. 2 in § 1 existiert ein solcher Wert.

Setzen wir $\delta = m : 2\sqrt{2}$ und konstruieren um $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ das Quadrat

$$\mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta, \quad \mathfrak{y}_0 - \delta \leqq \mathfrak{y} \leqq \mathfrak{y}_0 + \delta,$$

so ist jeder Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, der diesem Quadrat angehört, von $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ höchstens um $\frac{m}{2}$ entfernt und daher ein Punkt von $\mathfrak{B}$. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 3. *Um* $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$, *den Bildpunkt von* (x_0, y_0), *läßt sich ein Quadrat*

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta, \\ \mathfrak{y}_0 - \delta \leqq \mathfrak{y} \leqq \mathfrak{y}_0 + \delta \end{cases}$$

derart konstruieren, daß jeder Punkt von $\mathfrak{Q}$ *der Bildpunkt eines und* (nach Satz 2) *nur eines Punktes von* Q *ist.*

Es lassen sich hiernach, und zwar nur auf eine Weise, zwei Funktionen $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ so wählen, daß die Transformation

$$(\mathfrak{T}) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \\ y = \mathfrak{w}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \end{cases}$$

jedem Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ von $\mathfrak{Q}$ gerade denjenigen Punkt (x, y) von Q zugeordnet, dem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bei der Transformation

$$(T) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = v(x, y), \\ \mathfrak{y} = w(x, y) \end{cases}$$

entspricht. $\mathfrak{T}$ ist die zu T inverse Transformation oder die Umkehrung von T.

§ 3.

Stetigkeit der Funktionen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Die Funktionen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sind, wie wir jetzt zeigen wollen, in $\mathfrak{Q}$ durchweg stetig. Es genügt, wenn wir folgendes beweisen:

Ist $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1), (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2), \ldots$ eine Punktfolge in $\mathfrak{Q}$, die nach $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ konvergiert, so hat man immer

$$\lim \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

$$\lim \mathfrak{w}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n) = \mathfrak{w}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Die Punkte (x_n, y_n) in Q, die den Punkten $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$ vermöge $\mathfrak{T}$ entsprechen, haben in Q sicher eine Häufungsstelle (x, y). Durch Unterdrückung geeigneter Glieder in der Folge (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... läßt sich eine Folge

$$(x_1', y_1'),\ (x_2', y_2'), \ldots$$

herstellen, die nach (x, y) konvergiert. Die zugehörigen Bildpunkte

$$(\mathfrak{x}_1', \mathfrak{y}_1'),\ (\mathfrak{x}_2', \mathfrak{y}_2'), \ldots$$

konvergieren dann aber wegen der Stetigkeit von $v(x, y)$, $w(x, y)$ nach dem Bildpunkt von (x, y). Andrerseits konvergieren sie aber nach $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Daraus geht hervor, daß $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Bildpunkt von (x, y) ist, und wir erkennen, daß die Folge (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... überhaupt nur eine Häufungsstelle (x, y) haben kann. Sie konvergiert also nach (x, y), d. h. $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$, $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$ konvergieren nach $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

§ 4.

Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitungen von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$.

$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und $(\mathfrak{x} + \Delta\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + \Delta\mathfrak{y})$ seien irgend zwei Punkte in $\mathfrak{Q}$ und (x, y) bzw. $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ die Punkte in Q, deren Bildpunkte sie sind. Dann haben wir

$$\Delta\mathfrak{x} = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y),$$
$$\Delta\mathfrak{y} = w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y)$$

oder nach Nr. 1 in § 1

$$\Delta\mathfrak{x} = v_1(\xi, \eta)\,\Delta x + v_2(\xi, \eta)\,\Delta y,$$
$$\Delta\mathfrak{y} = w_1(\bar{\xi}, \bar{\eta})\,\Delta x + w_2(\bar{\xi}, \bar{\eta})\,\Delta y.$$

Dabei liegen (ξ, η) und $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ auf der Verbindungsstrecke von (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Wir können die obigen Gleichungen nach Δx, Δy auflösen, da nach Satz 1 ihre Determinante, die wir mit D bezeichnen wollen, ungleich Null ist. Wir erhalten auf diese Weise

$$\Delta x = \frac{1}{D}\{w_2(\bar{\xi}, \bar{\eta})\,\Delta\mathfrak{x} - v_2(\xi, \eta)\,\Delta\mathfrak{y}\},$$

$$\Delta y = \frac{1}{D}\{-w_1(\bar{\xi}, \bar{\eta})\,\Delta\mathfrak{x} + v_1(\xi, \eta)\,\Delta\mathfrak{y}\}.$$

Setzen wir $\varDelta\mathfrak{y} = 0$, $\varDelta\mathfrak{x} \gtrless 0$, so erhalten wir

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta\mathfrak{x}} = \frac{1}{D}\, w_2\,(\bar{\xi}, \bar{\eta}),\ \frac{\varDelta y}{\varDelta\mathfrak{x}} = -\,\frac{1}{D}\, w_1\,(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

Lassen wir, während $\varDelta\mathfrak{y} = 0$ bleibt, $\varDelta\mathfrak{x}$ nach Null konvergieren, so wird nach § 3

$$\lim \varDelta x = 0, \quad \lim \varDelta y = 0,$$

also

$$\lim \xi = \lim \bar{\xi} = x,$$

$$\lim \eta = \lim \bar{\eta} = y,$$

und [illegible] von v_1, v_2, w_1, w_2 ergibt sich

$$\lim \frac{\varDelta x}{\varDelta\mathfrak{x}} = \frac{w_2\,(x, y)}{v_1\,(x, y)\, w_2\,(x, y) - v_2\,(x, y)\, w_1\,(x, y)},$$

$$\lim \frac{\varDelta y}{\varDelta\mathfrak{x}} = \frac{-\, w_1\,(x, y)}{v_1\,(x, y)\, w_2\,(x, y) - v_2\,(x, y)\, w_1\,(x, y)}.$$

Ganz ebenso findet man, wenn $\varDelta\mathfrak{x} = 0$ und $\varDelta\mathfrak{y} \gtrless 0$ ist,

$$\lim \frac{\varDelta x}{\varDelta\mathfrak{y}} = \frac{-\, v_2\,(x, y)}{v_1\,(x, y)\, w_2\,(x, y) - v_2\,(x, y)\, w_1\,(x, y)},$$

$$\lim \frac{\varDelta y}{\varDelta\mathfrak{y}} = \frac{v_1\,(x, y)}{v_1\,(x, y)\, w_2\,(x, y) - v_2\,(x, y)\, w_1\,(x, y)}.$$

Damit ist die Existenz der ersten Ableitungen von $\mathfrak{v}\,(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{w}\,(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bewiesen.

Man sieht aus den oben gefundenen Ausdrücken, daß die Ableitungen in $\mathfrak{Q}$ durchweg stetig sind. Denn diese Ausdrücke sind in Q stetige Funktionen von x, y und x, y nach § 3 in $\mathfrak{Q}$ stetige Funktionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$.

§ 5.

Implizite Funktionen.

$F\,(x, y)$ habe in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) stetige Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1\,(x, y),\ \frac{\partial F}{\partial y} = F_2\,(x, y).$$

Es sei außerdem

$$F\,(x_0, y_0) = 0, \text{ aber } F_2\,(x_0, y_0) \gtrless 0.$$

Betrachten wir die Transformation

$$(T) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x, \\ \mathfrak{y} = F(x, y), \end{cases}$$

so sind alle in § 2 gestellten Bedingungen erfüllt. Es ist hier

$$v(x, y) = x, \quad w(x, y) = F(x, y)$$

und die Funktionaldeterminante von v, w gleich $F_2(x, y)$. Bezeichnen wir wie früher mit $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ den Bildpunkt von (x_0, y_0), so haben wir $\mathfrak{x}_0 = x_0$, $\mathfrak{y}_0 = 0$.

Nach § 2 lassen sich um (x_0, y_0) und $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ die Quadrate

$$(Q) \quad \begin{cases} x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon, \\ y_0 - \varepsilon \leqq y \leqq y_0 + \varepsilon \end{cases} \qquad (\mathfrak{Q}) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta, \\ \mathfrak{y}_0 - \delta \leqq \mathfrak{y} \leqq \mathfrak{y}_0 + \delta \end{cases}$$

derart konstruieren, daß jeder Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in $\mathfrak{Q}$ der Bildpunkt eines und nur eines Punktes (x, y) in Q ist.[1] Die Transformation, welche jedem Punkt von $\mathfrak{Q}$ gerade denjenigen Punkt von Q zugeordnet, dessen Bildpunkt er bei T ist, also die zu T inverse Transformation, hat hier offenbar folgende Gestalt:

$$(\mathfrak{T}) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}). \end{cases}$$

Daß $\mathfrak{T}$ zu T invers ist, drückt sich durch die Gleichung

$$\mathfrak{y} = F\big(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\big)$$

aus, die in dem ganzen Quadrat $\mathfrak{Q}$ gilt. Setzen wir $\mathfrak{y} = 0$, so kommt

$$0 = F\big(\mathfrak{x}, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0)\big). \qquad (\mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta)$$

Wenn eine Funktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ in dem ganzen Intervall $(\mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta)$ die Gleichung

$$0 = F\big(\mathfrak{x}, \mathfrak{f}(\mathfrak{x})\big)$$

erfüllt und dabei (wie $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0)$) den Ungleichungen

$$y_0 - \varepsilon \leqq \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \leqq y_0 + \varepsilon$$

genügt, so ist

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0).$$

---

1) Da hier $\mathfrak{x} = x$, so ist sicher $\varepsilon \geqq \delta$.

Da nämlich die in Q liegenden Punkte

$$x = \mathfrak{x},\ y = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \text{ und } x = \mathfrak{x},\ y = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0)$$
$$(\mathfrak{x}_0 - \delta \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_0 + \delta)$$

beide den Bildpunkt $(\mathfrak{x}, 0)$ haben, so müssen sie zusammenfallen.

Aus § 4 wissen wir, daß

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0)}{\partial \mathfrak{x}}$$

in dem ganzen Intervall $(\mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta)$ existiert und stetig ist. Die implizite Funktion, deren Existenz wir bewiesen haben, hat also in $(\mathfrak{x}_0 - \delta, \mathfrak{x}_0 + \delta)$ überall eine stetige Ableitung.

Druckfertig erklärt 15. II. 1908.]

Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades.

(Zweite Mitteilung.)

Von

K. Żorawski.

In der ersten Mitteilung[1]) haben wir unter anderem mit Benutzung endlicher Transformationsgleichungen und Anwendung des Gruppenbegriffes das Problem der Differentialinvarianten und der Differentialparameter derjenigen unendlichen Gruppe behandelt, welche durch die Invarianz einer binären Differentialform zweiten Grades charakterisiert wird. Es ist klar, daß diese Betrachtungsweise auf Differentialformen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variablen angewendet werden kann. Die Differentialinvarianten und Differentialparameter solcher allgemeiner Differentialformen wurden von C. N. Haskins in zwei Abhandlungen „On the invariants of quadratic differential forms"[2]) mit Hilfe infinitesimaler Transformationen untersucht. Derselbe stellt in diesen wichtigen Arbeiten die Anzahlen genannter Differentialinvarianten und Differentialparameter verschiedener Ordnungen und Kategorien auf. Es scheint uns aber vom Interesse zu sein, auf diese Fragen auch mit Hilfe endlicher Gleichungen der betreffenden Transformationsgruppe einzugehen und wir beabsichtigen hier daher in erster Linie, die in bezug auf die Anzahlen von Invarianten bereits erhaltenen Resultate auf dem genannten Wege abzuleiten. Es handelt sich dabei um die Einsicht in gewisse Eliminationsprozesse, und diese Prozesse können derart geführt werden, daß gerade dieselben Hilfssätze zur Geltung kommen, welche von C. N. Haskins gebraucht wurden. Die Beweise der

1) Diese Berichte, 1907, S. 160—186.

2) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3, S. 71—91 (1902) Vol. 5, S. 167—192 (1904).

Hilfssätze liegen bei C. N. Haskins vor und wir gehen auf diese Beweise nicht weiter ein.

In zweiter Linie beschäftigen wir uns mit gewissen Fragen, die von C. N. Haskins nicht behandelt wurden. Hat man nämlich mit einer abzählbaren Menge von Ausdrücken zu tun, welche von zwei Kategorien von Funktionen und von den Differentialquotienten dieser Funktionen abhängig sind und will man diese Ausdrücke klassifizieren, so kann die Klassifikation nach demjenigen Prinzipe geschehen, welches wir auf die Differentialparameter des binären Falles in § 3 und § 8 der ersten Mitteilung angewendet haben. In der gegenwärtigen Abhandlung werden derartige Fragen in bezug auf die hier in Betracht kommenden verschiedenartigen Differentialparameter beantwortet.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß wir auf bibliographische Angaben, welche die Invariantentheorie quadratischer Differentialformen betreffen, hier ausführlicher nicht eingehen. Mehrere solche Angaben sind in den soeben genannten Arbeiten von C. N. Haskins und unserer ersten Mitteilung enthalten.[1])

§ 1.

Es seien n unabhängige Veränderlichen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ferner $\frac{n(n+1)}{2}$ Funktionen derselben:

$$a_{rs} = a_{sr} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

und man betrachte die Differentialform:

$$(1) \qquad \varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s ,$$

deren Diskriminante, die wir nicht identisch gleich Null voraussetzen, mit a bezeichnet wird.[2])

Wir wollen in die Form (1) an Stelle der Veränderlichen x_1, $x_2, \ldots, x_n$ andere unabhängige Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein-

1) Man siehe auch Th. de Donder, Mémoires de l'Académie de Belgique, Nouvelle série, t. I. 1904, 1905.

2) Mehrere Bezeichnungen, die hier gebraucht werden, sind dem Werke des Herrn G. Ricci „Lezioni sulla teoria delle superficie" entnommen.

führen und die Bezeichnungen in der Weise wählen, daß die Beziehungen:

$$dx_r = \sum_1^n {}_p x_r^{(p)} dy_p \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Wenn man die Differentialform, in welche φ durch die genannte Variabelnänderung übergeht, in der Gestalt:

$$(\varphi) = \sum_1^n {}_{pq} (a_{pq}) dy_p dy_q$$

darstellt, so werden die neuen Koeffizienten (a_{pq}) durch die Formeln:

$$(2) \qquad (a_{pq}) = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} x_r^{(p)} x_s^{(q)} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt sein. Auf Grund dieser Gleichungen können durch Differentiation Gleichungen abgeleitet werden, welche die Ausdrücke der Differentialquotienten verschiedener Ordnungen der (a_{pq}) nach den y_k durch die Differentialquotienten der a_{rs} nach den x_i und die Differentialquotienten der x_i nach den y_k angeben. Man betrachte alle möglichen derartigen Beziehungen bis zu der μ-ten Ordnung inklusive der Differentialquotienten der (a_{pq}) nach den y_k und man nenne System $G_n^{(\mu)}$ das System von Gleichungen, welches aus den Gleichungen (2) und allen genannten Beziehungen besteht. Es erhellt, daß in diesem System die Differentialquotienten der a_{rs} nach den x_i gleichfalls bis zur μ-ten Ordnung derselben aufsteigen und es braucht nicht näher erläutert werden, daß dieses System $G_n^{(\mu)}$ in bezug auf alle a_{rs} und deren Differentialquotienten nach den x_i bis zur μ-ten Ordnung inklusive auflösbar ist. Ferner ist es auch klar, daß in diesem System die Differentialquotienten der x_i nach den y_k genau bis zur $(\mu + 1)$-ten Ordnung inklusive auftreten.

Die Gleichungen des Systems $G_n^{(\mu)}$ können nach Ordnungen eingeteilt werden und wir werden unter den Gleichungen l-ter Ordnung alle diejenigen Gleichungen verstehen, welche die Ausdrücke für alle Differentialquotienten l-ter Ordnung der (a_{pq}) nach den y_k angeben. Die Gleichungen (2) können dabei Gleichungen 0-ter Ordnung genannt werden. Es ist klar, daß bei $l \geqq 1$ die Anzahl der Gleichungen l-ter Ordnung gleich

$$\frac{n(n+1)}{2} \, \frac{n(n+1)\cdots(n+l-1)}{1 \cdot 2 \cdots l}$$

ist.

Wir streben dahin, uns Rechenschaft über alle Resultanten zu verschaffen, welche aus dem System $G_n^{(\mu)}$ durch Elimination der Differentialquotienten der x_i nach den y_k entstehen. Zu dem Zwecke bemerke man, daß Christoffel[1]) die $n\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen erster Ordnung in bezug auf $n\frac{n(n+1)}{2}$ Differentialquotienten zweiter Ordnung der x_i nach den y_k aufgelöst hat und also diese Größen durch die Koeffizienten a_{rs} und deren erste Differentialquotienten nach den x_t, durch die Koeffizienten (a_{pq}) und deren erste Differentialquotienten nach den y_k und endlich durch die Differentialquotienten erster Ordnung der x_i nach den y_k ausgedrückt hat. Man sieht leicht, daß durch die Differentiation der Christoffelschen Ausdrücke und durch jedesmaliges Einsetzen dieser Ausdrücke an Stelle der Differentialquotienten zweiter Ordnung der x_i nach den y_k Beziehungen von folgender Beschaffenheit erhalten werden. Es werden nämlich für jedes $l > 1$ alle $n\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(l+1)}$ Differentialquotienten $(l+1)$-ter Ordnung der x_i nach den y_k durch die Koeffizienten a_{rs} und deren Differentialquotienten nach den x_i bis zur l-ten Ordnung inklusive, ferner durch die Koeffizienten (a_{pq}) und deren Differentialquotienten nach den y_k bis zur l-ten Ordnung inklusive, endlich durch die Differentialquotienten erster Ordnung der x_i nach den y_k ausgedrückt. Alle diese Beziehungen, sowie auch die Christoffelschen Gleichungen selbst, folgen durch Differentiationen aus dem System (2), es ist daher klar, daß sobald nur $l \leq \mu$, diese Beziehungen einen Teil der Gleichungen des Systems $G_n^{(\mu)}$ ausmachen. Mit Hilfe aller dieser Beziehungen ist es ferner möglich, alle Differentialquotienten der x_i nach den y_k von den Ordnungen, die größer als 1 sind, aus dem übrig bleibenden Teile des Systems $G_n^{(\mu)}$ zu entfernen. Hat man diese Operationen ausgeführt, so ist es klar, daß unser Eliminationsproblem sich darauf reduziert, aus dem zuletzt genannten Teile des Systems $G_n^{(\mu)}$ die Differentialquotienten erster Ordnung der x_i nach den y_k zu eliminieren.

Wir wollen nun mit γ_l diejenigen Gleichungen bezeichnen, welche aus den Gleichungen l-ter Ordnung durch die eben besprochene Entfernung der höheren Differentialquotienten der x_i nach den y_k entstehen. Wenn man überdies mit (γ_l) die Anzahl aller

1) Crelles Journal, Band 70, S. 49.

unabhängigen derartigen Gleichungen bezeichnet, so erhält man für $l \geqq 1$ die Zahl:

$$
(3) \quad \begin{aligned}
(\gamma_l) &= \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)\cdots(n+l-1)}{1\cdot 2\cdots l} - n\frac{n(n+1)\cdots(n+l)}{1\cdot 2\cdots (l+1)} \\
&= \frac{n}{2}(l-1)\frac{(n+l-1)!}{(n-2)!\,(l+1)!};
\end{aligned}
$$

für $l = 0$ ist augenscheinlich:

$$
(\gamma_0) = \frac{n(n+1)}{2}.
$$

Es ist klar, daß aus den Gleichungen γ_0 alle Differentialquotienten erster Ordnung der x_i nach den y_k nicht eliminiert werden können. Wir werden deshalb das Gesamtsystem der Gleichungen γ_0 und γ_2 betrachten. Die Anzahl der Gleichungen γ_2 ist:

$$
(\gamma_2) = \frac{n^2(n^2-1)}{12};
$$

diese Gleichungen sind nämlich von Christoffel[1]) aufgestellt worden. Wenn man mit $a_{rs,\,r's'}$ die sogenannten Vierindizes Christoffelschen Symbole für das System der Veränderlichen x_i bezeichnet und für die Veränderlichen y_k die Bezeichnung $(a_{pq,\,p'q'})$ benutzt, so lauten die Gleichungen γ_2:

$$
(4) \quad (a_{pq,\,p'q'}) = \sum_{rs,\,r's'}^{n}{}_{1} a_{rs,\,r's'}\, x_r^{(p)} x_s^{(q)} x_{r'}^{(p')} x_{s'}^{(q')}, \quad (p, q, p', q' = 1, 2, \cdots, n).
$$

Wir haben:

$$
(\gamma_0) + (\gamma_2) = n^2 + \frac{(n-2)(n-1)n(n+3)}{12}
$$

und man sieht daraus, daß für $n > 2$ die Anzahl der Gleichungen γ_0 und γ_2 größer als die Anzahl der Ableitungen erster Ordnung der Größen x_i nach den y_k ist. Wir fragen nun, ob unter diesen Gleichungen derartige n^2 vorhanden sind, welche in bezug auf die genannten Ableitungen unabhängig wären. Diese Frage wäre zu bejahen, wenn unter den genannten Gleichungen n^2 derartige vorhanden wären, für welche die Funktionaldeterminante rechter Seiten in bezug auf die $x_i^{(k)}$ nicht identisch gleich Null ist. Man bilde die Differentiale der Ausdrücke (2) und (4), indem man nur die Größen $x_i^{(k)}$ als Veränderliche betrachtet. Wenn man dabei die Bezeichnungen:

$$
d x_i^{(k)} = \xi_{ik}
$$

1) loco cit. S. 54.

benutzt, so ergibt sich:

$$d(a_{pq}) = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}(x_s^{(q)} \xi_{rp} + x_r^{(p)} \xi_{sq}), \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, n),$$

$$d(a_{pq,p'q'}) = \sum_1^n {}_{rsr's'} a_{rs,r's'}(x_s^{(q)} x_{r'}^{(p')} x_{s'}^{(q')} \xi_{rp} + x_r^{(p)} x_{r'}^{(p')} x_{s'}^{(q')} \xi_{sq}$$
$$+ x_r^{(p)} x_s^{(q)} x_{s'}^{(q')} \xi_{r'p'} + x_r^{(p)} x_s^{(q)} x_{r'}^{(p')} \xi_{s'q'}), \qquad (p, q, p', q' = 1, 2, \cdots, n).$$

Wenn mindestens eine Funktionaldeterminante existiert, die nicht identisch gleich Null ist, so folgen aus den Gleichungen:

$$(5) \qquad d(a_{pq}) = 0 \text{ und } d(a_{pq,p'q'}) = 0 \qquad (p, q, p', q' = 1, 2, \cdots, n)$$

lauter Nullwerte für alle Größen ξ_{ik}. Wenn anderseits bei irgend einer speziellen Annahme aus den Gleichungen (5) lauter Nullwerte für alle ξ_{ik} sich ergeben, so beweist dies, daß mindestens eine Funktionaldeterminante existiert, die nicht identisch gleich Null ist. Alsdann wäre unter den Gleichungen γ_0 und γ_2 mindestens ein System von n^2 Gleichungen vorhanden, welches in bezug auf die n^2 Größen $x_i^{(k)}$ unabhängig wäre.

Wir wollen nun die Gleichungen (5) unter der speziellen Annahme:

$$x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

aufschreiben. Es ergibt sich:

$$(6) \begin{cases} \sum_1^n {}_r(a_{rq}\xi_{rp} + a_{pr}\xi_{rq}) = 0, & (p, q = 1, 2, \cdots, n) \\ \sum_1^n {}_r(a_{rq,p'q'}\xi_{rp} + a_{pr,p'q'}\xi_{rq} + a_{pq,rq'}\xi_{rp'} + a_{pq,p'r}\xi_{rq'}) = 0. & (p, q, p', q' = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind mit den Gleichungen (A) und (B) identisch, die auf S. 81 der ersten der früher genannten Arbeiten von C. N. Haskins angegeben sind. In dieser Arbeit sind dabei für die betrachtete Differentialform derartige spezielle Annahmen getroffen worden, bei welchen aus den Gleichungen (6) lauter Nullwerte sich ergeben. Daraus folgt, daß unter den Gleichungen γ_0 und γ_2 sicher mindestens ein System von n^2 derartigen Gleichungen vorhanden ist, welches in bezug auf alle Größen $x_i^{(k)}$ aufgelöst werden kann.

Wenn man diese Auflösung ausführt und die erhaltenen Resultate in die übrigen Gleichungen γ_0 und γ_2 einsetzt, so erhält man:

$$\frac{(n-2)(n-1)n(n+3)}{12}$$

Resultanten zweiter Ordnung. Und wenn man die durch Auflösung erhaltenen Werte in die Gleichungen γ_l $(l > 2)$ einsetzt, so ergeben sich

$$n\frac{l-1}{2}\frac{(n+l-1)!}{(n-2)!\,(l+1)!}$$

Resultanten l-ter Ordnung. Dies sind aber die von C. N. Haskins aufgestellten Anzahlen der Differentialinvarianten verschiedener Ordnungen.

§ 2.

Wir betrachten nun $m \leqq n$ Funktionen:

$$f_h = f_h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (h = 1, 2, \cdots, m).$$

Wenn man in dieselben an Stelle der Veränderlichen x_i die Veränderlichen y_k einführt, so ergeben sich m Funktionen:

$$(f_h) = (f_h)(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (h = 1, 2, \cdots, m)$$

und durch Differentiation ergeben sich die Gleichungen:

$$(7) \qquad \frac{\partial (f_h)}{\partial y_p} = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{df_h}{dx_r} x_r^{(p)} \qquad \binom{h = 1, 2, \cdots, m}{p = 1, 2, \cdots, n}.$$

Aus diesen Gleichungen können durch Differentiationen Gleichungen abgeleitet werden, welche Differentialquotienten einer beliebigen Ordnung der Funktionen (f_h) nach den $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch die Differentialquotienten der Funktionen f_h nach den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmen. Man betrachte alle diejenigen dieser Gleichungen, welche zusammen mit den Gleichungen (7) alle Differentialquotienten der Funktionen (f_h) nach den Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bis zu einer Ordnung μ inklusive angeben. Diese Gleichungen enthalten sämtliche Differentialquotienten der Funktionen f_h nach den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ebenfalls bis zur μ-ten Ordnung inklusive und sind in bezug auf die letzteren auflösbar. Man bemerke, daß in diesen Gleichungen die Differentialquotienten der x_i nach den y_k auch bis zur μ-ten Ordnung inklusive aufsteigen. Zu diesem System von Gleichungen füge man noch das System $G_n^{(\mu-1)}$ hinzu, in welchem die Differentialquotienten der x_i nach den y_k ebenfalls bis zur μ-ten

Ordnung inklusive aufsteigen und nenne man das auf diese Weise erhaltene Gesamtsystem $B^{(\mu)}_{n,m}$.

Wir wollen nun die Gleichungen dieses Systems $B^{(\mu)}_{n,m}$ klassifizieren. Es seien nämlich Gleichungen l-ten Ranges alle diejenigen der früher betrachteten Gleichungen genannt, welche die Differentialquotienten der Funktionen (f_h) nach den Veränderlichen y_k von der l-ten Ordnung und die Differentialquotienten der Funktionen (a_{pq}) nach den y_k von der $(l-1)$-ten Ordnung enthalten, wobei unter den Differentialquotienten 0-ter Ordnung die Funktionen (a_{pq}) selbst zu verstehen sind. Demnach zerfällt das System $B^{(\mu)}_{n,m}$ in Systeme von Gleichungen ersten, zweiten usw. μ-ten Ranges.

Unsere nächste Aufgabe wird es sein, uns über die Resultanten Rechenschaft zu verschaffen, welche durch Elimination der Differentialquotienten der x_i nach den y_k aus dem Systeme $B^{(\mu)}_{n,m}$ folgen. Es erhellt, daß unter diesen Resultanten im allgemeinen Resultanten vorhanden sind, die früher im § 1 betrachtet wurden. Wir wollen die Resultanten des Systems $B^{(\mu)}_{n,m}$, welche von den früheren unabhängig sind, Resultanten zweiter Art nennen. Es sollen dabei die Resultanten zweiter Art, welche aus dem System $B^{(l)}_{n,m}$ sich ergeben und von allen Resultanten des Systems $B^{(l-1)}_{n,m}$ unabhängig sind, Resultanten zweiter Art und l-ten Ranges genannt werden. Diese Resultanten l-ten Ranges führen auf Differentialparameter l-ten Ranges. Wir wollen zunächst gewisse Umformungen der betrachteten Gleichungen unternehmen.

Mit Hilfe der von Christoffel aufgestellten Gleichungen, welche die Ausdrücke für die Differentialquotienten zweiter Ordnung der x_i nach den y_k durch die ersten Differentialquotienten der x_i nach den y_k, ferner durch a_{pq} und deren ersten Differentialquotienten nach den x_i, endlich durch (a_{pq}) und deren ersten Differentialquotienten nach den y_k liefern, ist es möglich, aus den Gleichungen des Systems $B^{(\mu)}_{n,m}$ Gleichungen zu erhalten, in denen nur die Differentialquotienten erster Ordnung der x_i nach den y_k auftreten. Man nenne β_l diejenigen dieser Gleichungen, welche auf diese Weise aus den Gleichungen l-ten Ranges hervorgehen, und man bezeichne mit (β_l) die Anzahl dieser Gleichungen. Es ist leicht zu ersehen, daß ganz allgemein die Formel:

$$(\beta_l) = (\gamma_{l-1}) + m\frac{n(n+1)\cdots(n+l-1)}{1\cdot 2\cdots l} \tag{8}$$

stattfindet.

Für $l = 1$ ist

$$(\beta_1) = \frac{n(n+1)}{2} + mn$$

und anderseits ist es bekannt, daß die Größen:

$$\Delta(f_h, f_{h'}) = \sum_{rs} a^{(rs)} \frac{\partial f_h}{\partial x_r} \frac{\partial f_{h'}}{\partial x_s}, \quad (h, h' = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

wo $a^{(rs)}$ das algebraische Komplement des Elementes a_{rs} der Diskriminante a dividiert durch diese Diskriminante a bezeichnet, Differentialparameter sind. Die Anzahl der Größen (9) ist gleich $\frac{m(m+1)}{2}$ und alle diese Größen sind voneinander unabhängig. Wenn man diese Differentialparameter den entsprechenden Differentialparametern in den Veränderlichen y_k gleichsetzt, so erhält man auf diese Weise $\frac{m(m+1)}{2}$ Resultanten zweiter Art und ersten Ranges und fragt es sich nun, ob es noch mehrere dieser Resultanten ersten Ranges gibt oder nicht.

Es ist klar, daß diese Frage durch die Untersuchung des Systems von Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}(x_s^{(q)} \xi_{rp} + x_r^{(p)} \xi_{sq}) = 0, && (p, q = 1, 2, \cdots, n) \\ &\sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial f_h}{\partial x_r} \xi_{rp} = 0 && \binom{h = 1, 2, \cdots, m}{p = 1, 2, \cdots, n} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

wo ξ_{ik} als Unbekannte betrachtet werden, entschieden werden kann. Man beachte aber, daß das System (10) für die spezielle Annahme $x_i = y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ die Form:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{n}{}_{r} (a_{rq} \xi_{rp} + a_{pr} \xi_{rq}) = 0, && (p, q = 1, 2, \cdots, n) \\ &\sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial f_h}{\partial x_r} \xi_{rp} = 0 && \binom{h = 1, 2, \cdots, m}{p = 1, 2, \cdots, n} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

annimmt und daß C. N. Haskins bewiesen hat, daß die Matrix dieses Systems mindestens eine Determinante mit $(\beta_1) - \frac{m(m+1)}{2}$

Zeilen besitzt, welche nicht identisch gleich Null ist.[1]) Daraus folgt, daß auch die Matrix des Systems (10) mindestens eine Determinante mit $(\beta_1) - \frac{m(m+1)}{2}$ Zeilen besitzt, welche nicht identisch gleich Null ist. Demnach existieren nur die $\frac{m(m+1)}{2}$ aufgestellten Resultanten zweiter Art und ersten Ranges und keine weiteren.

Man nehme jetzt in der Formel (8) $l = 2$ an. Es ergibt sich:

$$(\beta_2) = m\frac{n(n+1)}{2}.$$

Diese Gleichungen β_2 können sogleich angegeben werden. Es ist nämlich bekannt, daß, wenn man das System der zweiten kovarianten Derivierten der Funktion f_h mit $f_{h,rs}$ und das analoge System der zweiten kovarianten Derivierten der Funktion (f_h) mit $(f_{h,pq})$ bezeichnet, so kann man die Gleichungen β_2 in der Form:

$$(12) \qquad (f_{h,pq}) = \sum_1^n {}_{rs} f_{h,rs} x_r^{(p)} x_s^{(q)} \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, n)$$

darstellen. Der Inhalt dieser Gleichungen kann anders in der Weise ausgesprochen werden, daß die Formen:

$$(13) \qquad \sum_1^n {}_{rs} f_{h,rs} dx_r dx_s \qquad (h = 1, 2, \cdots, m)$$

absolute Kovarianten der Form φ sind. Es ist nun bekannt, daß das System von simultanen Formen, welches aus φ und den Formen (13) besteht, $(m+1)\frac{n(n+1)}{2} - n^2$ absolute Invarianten besitzt. Das heißt, daß es unter den Gleichungen (2) und (12) n^2 derartige gibt, die in bezug auf n^2 Differentialquotienten $x_i^{(k)}$ aufgelöst werden können und daß, wenn man die erhaltenen Lösungen in die übrigen dieser Gleichungen einsetzt, $(m+1)\frac{n(n+1)}{2} - n^2$ Resultanten des Systems (2) und (12) sich ergeben. Wenn man nun zu diesem System noch die Gleichungen (7) hinzufügt und die soeben genannten Lösungen noch in diese Gleichungen einsetzt, so erhält man mn weitere Resultanten. Unter diesen zwei Reihen von Resultanten befinden sich aber die $\frac{m(m+1)}{2}$ Resultanten zweiter Art und ersten

1) Die zweite der zitierten Abhandlungen von Haskins S. 176—179.

Ranges. Daraus folgt, daß die Anzahl der Differentialparameter zweiten Ranges gleich

$$\frac{mn(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$$

ist.

Nun ist es sehr leicht, die Anzahl der Resultanten zweiter Art und höherer Rangen anzugeben. Da nämlich unter den Gleichungen β_1 und β_2 sicher n^2 derartige vorhanden sind, welche in bezug auf die n^2 Differentialquotienten $x_i^{(k)}$ aufgelöst werden können, so entstehen durch Einsetzen dieser Lösungen in die Gleichungen β_3 gerade (β_3) Resultanten, unter denen alle Resultanten zweiter Ordnung vorhanden sind, die im § 1 betrachtet wurden. Daher ist die Anzahl der Differentialparameter dritten Ranges gleich:

$$m\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Da ferner die Anzahlen der Resultanten, welche im § 1 betrachtet wurden, für die Ordnungen, die höher als 2 sind, entsprechend den Zahlen (γ_l) gleich sind, so ist es klar, daß die Anzahl der Differentialparameter l-ten Ranges für $l > 3$ gleich $(\beta_l)-(\gamma_{l-1})$, d. h. durch die Formel:

$$m\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\; l!}$$

dargestellt ist.

§ 3.

Es ist nun von Interesse, für allgemeine quadratische Differentialformen denjenigen ähnliche Fragen zu betrachten, welche wir im § 3 unserer ersten Mitteilung für binäre Differentialformen beantwortet haben. Man bezeichne mit α die höchste Ordnung der in einer Invariante vorkommenden Differentialquotienten der a_{ik} und mit β die höchste Ordnung der in der Invariante vorkommenden Differentialquotienten der willkürlichen Funktionen f_h. Es wird dabei $\alpha = 0$ die Bedeutung haben, daß keine Differentialquotienten der a_{ik}, sondern nur die a_{ik} selbst in der Invariante vorkommen, es wird anderseits $\beta = 0$ bedeuten, daß in der Invariante keine Differentialquotienten willkürlicher Funktionen auftreten. Wir wollen ferner mit dem Symbol (A, B) die Anzahl aller derjenigen Invarianten bezeichnen, für welche $\alpha = A$, $\beta = B$ ist und welche alle voneinander und von allen denjenigen Invarianten unabhängig sind, die entweder der Bedingung $\alpha < A$, $\beta = B$, oder der Bedingung $\alpha = A$, $\beta < B$, oder

der Bedingung $\alpha < A$, $\beta < B$ genügen. Wir wollen nun alle möglichen Zahlen (A, B) aufstellen.

Es sind im § 1 alle Zahlen $(A, 0)$ bestimmt worden.

Um alle möglichen Zahlen $(A, 1)$ zu erhalten, sollen die Gleichungen der Systeme $\beta_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots$ betrachtet werden. Es erhellt zunächst, daß

$$(0, 1) = \frac{m(m+1)}{2}, \quad (1, 1) = 0$$

und wenn man ferner bemerkt, daß die Anzahl aller Resultanten, welche aus dem Gesamtsysteme β_1 und γ_2 sich ergeben, gleich $(\beta_1) + (\gamma_2) - n^2$ ist und daß

$$(2, 0) = \frac{(n-2)(n-1)n(n+3)}{12},$$

so folgt:

$$(2, 1) = mn - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Da wir die nämliche Anzahl von Differentialparametern wie die der Gleichungen (7) bereits erhalten haben, so ergibt sich für $A > 2$:

$$(A, 1) = 0.$$

Es wird auch leicht sein, alle Zahlen $(A, 2)$ zu bestimmen. Man wird hierfür zunächst zum Systeme β_1 diejenigen Gleichungen hinzufügen müssen, welche aus den Gleichungen (7) durch alle möglichen einmaligen Differentiationen sich ergeben. Aus diesen Gleichungen können offenbar die zweiten Differentialquotienten der x_i nach den y_k nicht eliminiert werden und man erhält daher:

$$(0, 2) = 0.$$

Betrachtet man ferner das System, welches aus β_1 und β_2 besteht, und beachtet, daß unter diesen Gleichungen n^2 solche vorhanden sind, die in bezug auf alle Differentialquotienten der x_i nach den y_k aufgelöst werden können, so wird man unter Berücksichtigung der Zahlen (β_1), (β_2) und einiger der aufgestellten Symbole (A, B) zu der Zahl:

$$(1, 2) = \frac{mn(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$$

gelangen. Weiter werden wir zu den Gleichungen β_1 und β_2 noch die Gleichungen γ_2 hinzufügen und analoge Bemerkungen führen zu dem Schlusse:

$$(2, 2) = \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}.$$

Wir haben auf diese Weise bereits ebensoviel Differentialparameter erhalten, für welche $\beta = 2$, als Gleichungen vorhanden sind, die aus (7) durch alle möglichen einmaligen Differentiationen folgen. Es ergibt sich daher für jedes $A > 2$:

$$(A,\ 2) = 0.$$

Wir können auch weiter in ähnlicher Weise fortfahren und wir glauben, daß es genügen wird, die Resultate zusammenzustellen. Dieselben können in einer Tabelle angebracht werden, deren Horizontalreihen den Werten von A und deren Vertikalreihen den Werten von B entsprechen. Die Zahl $(A,\ B)$ wird dabei in der der Zahl A entsprechenden Horizontalreihe und in der der Zahl B entsprechenden Vertikalreihe gelegen sein. Man kommt derart zu dem Schema:

	0	1	2	3
0	0	$\frac{m(m+1)}{2}$	0	0
1	0	0	$\frac{mn(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$	0
2	$\frac{(n-2)(n-1)n(n+3)}{1\cdot 2}$	$mn - \frac{m(m+1)}{2}$	$\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$	$m\frac{(n+2)!}{(n-1!)\,3!}$
3	$n\frac{(n+2)!}{(n-2)!\,4!}$	0	0	0

in welchem die Zusammenfassung aller Resultate enthalten ist, über welche bis jetzt in der gegenwärtigen Abhandlung die Rede war.

§ 4.

Wir haben Differentialparameter mit $m \leq n$ willkürlichen Funktionen betrachtet und wir wollen nun fragen, ob unter diesen Differentialparametern derartige vorhanden sind, welche weder die Koeffizienten der Differentialform, noch die Ableitungen dieser Koeffizienten enthalten. Um diese Frage zu beantworten, nehmen

wir $m = n$ an und beachten, daß wir alsdann mit den Gleichungen:

$$\frac{\partial(f_h)}{\partial y_p} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial f_h}{\partial x_r} x_r^{(p)}, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, n \\ p = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2(f_h)}{\partial y_p \partial y_q} = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s \frac{\partial^2 f_h}{\partial x_r \partial x_s} x_r^{(p)} x_s^{(q)} + \sum_1^n {}_r \frac{\partial f_h}{\partial x_r} x_r^{(p,q)}, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, n \\ p, q = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

. . . .

wo $x_r^{(p,q)}$ die Differentialquotienten zweiter Ordnung der x_r nach den y_p bezeichnen, zu tun haben. Man sieht ohne weiteres ein, daß man aus diesen Gleichungen alle Differentialquotienten aller Ordnungen der x_r nach den y_p durch die Differentialquotienten der Funktionen f_h und (f_h) ausdrücken kann, daß aber auf diese Weise alle diese Gleichungen ausgenutzt sein werden. Daraus schließt man, daß im Falle $m \leqq n$ keine Differentialparameter existieren, in denen nur die Ableitungen willkürlicher Funktionen f_h auftreten.

Es ist leicht zu sehen, daß im Falle $m = n$ die Summe der Anzahlen der Differentialinvarianten $(l - 1)$-ter Ordnung und der Differentialparameter l-ten Ranges unabhängig von den Betrachtungen der früheren Nummer angegeben werden kann. Es können nämlich die Gleichungen, welche die Funktionen f_h enthalten, zur Bestimmung aller Differentialquotienten der x_r nach den y_p benutzt werden und wenn man die erhaltenen Ausdrücke in diejenigen der Gleichungen $G_n^{(\mu)}$ einsetzt, welche zur Ordnung $(l - 1)$ angehören, so wird man alle Resultanten erhalten, welche die Differentialinvarianten $(l-1)$-ter Ordnung und alle Differentialparameter l-ten Ranges liefern. Daher ist diese Anzahl für $l > 1$ gleich:

$$\frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)\cdots(n+l-2)}{1 \cdot 2 \cdots (l-1)}$$

und für $l = 1$ gleich:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

und man sieht, daß dies mit den früheren Angaben übereinstimmt.

Wir haben bisher Differentialparameter betrachtet, welche entstehen, sobald man $m \leqq n$ Funktionen f_h benutzt. Es sei nun $n + m'$ Funktionen f_h und man frage, wie viele Differentialparameter eines jeden Ranges existieren, die von den früheren, in welchen die Funktionen f_h $(h = 1, 2, \cdots, n)$ nicht aber die Funktionen f_h $(h = n + 1, n + 2, \cdots, n + m')$ auftreten, unabhängig sind. Auf

Grund obiger Bemerkungen ist es leicht zu sehen, daß diese Anzahl derjenigen Anzahl von Gleichungen eines jeden Ranges gleich ist, welche wegen der Einführung m' neuer Funktionen f_h hinzukommen. Es ist also die Anzahl neuer Differentialparameter l-ten Ranges gleich

$$m'\frac{n(n+1)\cdots(n+l-1)}{1\cdot 2\cdots l}$$

und dabei ist ersichtlich, daß alle diese Differentialparameter so gewählt werden können, daß in denselben die Koeffizienten der Differentialform und die Ableitungen dieser Koeffizienten gar nicht vorkommen. Für den Rang 1 sind es nämlich die ersten Ableitungen der f_{n+k} $(k=1, 2, \cdots, m')$ nach den f_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ d. h. die Ausdrücke:

$$\frac{\partial f_{n+k}}{\partial f_i}=\frac{\dfrac{D(f_1,\ldots,f_{i-1},f_{n+k},f_{i+1},\cdots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)}}{\dfrac{D(f_1,\ldots,f_{i-1},f_i,f_{i+1},\cdots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)}}.$$

$$(i=1, 2, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, m').$$

Für höhere Range sind es höhere Differentialquotienten der f_{n+k} nach den f_i.

Auf Grund dieser Bemerkungen ist es ersichtlich, daß, sobald man näher die Gesamtheit der Differentialparameter untersuchen will, genügt es vorauszusetzen, daß $m \leqq n$ ist.

§ 5.

Die Gesamtheit der Werte der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt eine n-fache Mannigfaltigkeit. Setzt man nun voraus, daß die Veränderlichen x_r Funktionen von $m<n$ Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sind, so wird dadurch in der früheren Mannigfaltigkeit eine im allgemeinen m-fache Mannigfaltigkeit festgelegt sein. Wenn man nun statt der Veränderlichen x_r neue Veränderliche y_p einführt, so werden diese letzteren gleichfalls Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sein. Es können daher Invarianten betrachtet werden, welche Differentialquotienten der x_r nach den Parametern enthalten. Für diese Invarianten wollen wir der Bequemlichkeit halber hier die Benennung Fundamentalgrößen der m-fachen Mannigfaltigkeit benutzen.

Wir haben zunächst die Gleichungen:

$$\frac{\partial x_r}{\partial u_h}=\sum_1^n {}_p\, x_r^{(p)}\frac{\partial y_p}{\partial u_h} \qquad \begin{pmatrix} r=1, 2, \cdots, n \\ h=1, 2, \cdots, m \end{pmatrix} \tag{14}$$

und durch Differentiation derselben nach den $u_1, u_2, \ldots, u_m$ können weitere Gleichungen erhalten werden. Man betrachte alle diejenigen dieser Gleichungen, welche aus (14) durch einmalige, zweimalige usw. $(\mu - 1)$-malige Differentiation sich ergeben, man füge zu denselben die Gleichungen $G_n^{(\mu-1)}$ hinzu und man bezeichne die Gesamtheit aller dieser Gleichungen mit $F_{n,m}^{(\mu)}$. Wenn man aus diesem Systeme die Differentialquotienten der x_r nach den y_p eliminiert, so kommt man auf die früher betrachteten Differentialinvarianten und außerdem auf die Fundamentalgrößen, über welche wir soeben gesprochen haben. Diese Fundamentalgrößen wollen wir nun klassifizieren. Es seien nämlich Fundamentalgrößen vom Range l alle diejenigen Invarianten genannt, welche durch Resultantenbildung des Systems $F_{n,m}^{(l)}$ erhalten werden können und welche sowohl von allen Differentialinvarianten überhaupt wie auch von allen denjenigen Invarianten, die durch Resultantenbildung des Systems $F_{n,m}^{(l-1)}$ sich ergeben, unabhängig sind. Unsere nächste Aufgabe wird es sein, die Anzahlen der Fundamentalgrößen verschiedener Range zu bestimmen.

Um diese Frage zunächst für den ersten Rang zu beantworten, bemerke man, daß, sodald man die Größen $x_r^{(p)}$ aus den Gleichungen:

$$(a_{pq}) = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} x_r^{(p)} x_s^{(q)} \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial y_p} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial f_h}{\partial x_r} x_r^{(p)} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, m \\ p = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

bei der Voraussetzung $m < n$ eliminiert, die $\frac{m(m+1)}{2}$ Gleichungen

$$\sum_1^n {}_{pq} (a^{(pq)}) \frac{\partial (f_h)}{\partial y_p} \frac{\partial (f_{h'})}{\partial y_q} = \sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)} \frac{\partial f_h}{\partial x_r} \frac{\partial f_{h'}}{\partial x_s}$$
$$(h, h' = 1, 2, \cdots, m)$$

sich ergeben, wo $(a^{(pq)})$ die algebraischen Komplemente der Elemente (a_{pq}) der Diskriminante der transformierten Differentialform dividiert durch diese Diskriminante bezeichnen. Man bemerke ferner, daß, sobald man in irgend welchen Beziehungen statt der Elemente a_{rs} und (a_{pq}), entsprechend die Größen $(a^{(rs)})$ und $a^{(pq)}$ setzt, so wird man in diesen Beziehungen demzufolge die Größen $(a^{(rs)})$ und $a^{(pq)}$ durch die Größen a_{rs} und (a_{pq}) ersetzen müssen. Wir wollen außer diesen Vertauschungen in den zuletzt

betrachteten Beziehungen noch überall statt $x_r^{(p)}$ die Größen $x_p^{(r)}$ und statt der Differentialquotienten $\frac{\partial (f_h)}{\partial y_p}$ und $\frac{\partial f_h}{\partial x_r}$ entsprechend die Differentialquotienten $\frac{\partial x_p}{\partial u_h}$ und $\frac{\partial y_r}{\partial u_h}$ einsetzen. Alsdann erhalten wir die Relationen:

$$a^{(pq)} = \sum_1^n {}_{rs} (a^{(rs)}) x_p^{(r)} x_q^{(s)} \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial u_h} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial y_r}{\partial u_h} x_p^{(r)} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, m \\ p = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

und die $\frac{m(m+1)}{2}$ Gleichungen:

$$\sum_1^n {}_{pq} a_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial u_h} \frac{\partial x_q}{\partial u_{h'}} = \sum_1^n {}_{rs} (a_{rs}) \frac{\partial y_r}{\partial u_h} \frac{\partial y_s}{\partial u_{h'}}.$$

$$(h, h' = 1, 2, \cdots, m).$$

Wenn man in diesen Beziehungen überall r mit p und s mit q vertauscht, so ergeben sich die Relationen:

$$(15) \qquad a^{(rs)} = \sum_1^n {}_{pq} (a^{(pq)}) x_r^{(p)} x_s^{(q)}, \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(16) \qquad \frac{\partial x_r}{\partial u_h} = \sum_1^n {}_p x_r^{(p)} \frac{\partial y_p}{\partial u_h} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, m \\ p = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

und die $\frac{m(m+1)}{2}$ Gleichungen:

$$(17) \qquad \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_h} \frac{\partial x_s}{\partial u_{h'}} = \sum_1^n {}_{pq} (a_{pq}) \frac{\partial y_p}{\partial u_h} \frac{\partial y_q}{\partial u_{h'}}.$$

$$(h, h' = 1, 2, \cdots, m).$$

Daraus folgt, daß die Gleichungen (17) alle Eliminationsresultate der Größen $x_r^{(p)}$ aus den Gleichungen (15) und (16) sind. Es ist nun aber das System (15) dem Systeme (2) äquivalent und das System (16) mit dem Systeme (14) identisch, es folgt also, daß die Gleichungen (17) alle Eliminationsresultate der Größen $x_r^{(p)}$ aus dem Systeme $F_{n,m}^{(1)}$ sind. Wir sind daher zum Resultate gekommen, daß die Anzahl aller voneinander unabhängigen Fundamentalgrößen

ersten Ranges gleich $\frac{m(m+1)}{2}$ ist und wir haben gleichzeitig konstatiert, daß:

$$c_{hh'} = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_h} \frac{\partial x_s}{\partial u_{h'}} \qquad (h, h' = 1, 2, \cdots, m)$$

alle diese Fundamentalgrößen ersten Ranges sind.

Indem wir nun zum zweiten Range übergehen, wollen wir zunächst die Bezeichnungen:

$$(18) \qquad \begin{aligned} a_{ik,l} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right), \\ (a_{pq,\lambda}) &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial (a_{p\lambda})}{\partial y_q} + \frac{\partial (a_{q\lambda})}{\partial y_p} - \frac{\partial (a_{pq})}{\partial y_\lambda}\right) \end{aligned}$$

und die Bezeichnungen:

$$(19) \qquad \begin{aligned} b_{ik,r} &= \sum_1^n {}_l a^{(rl)} a_{ik,l} \\ (b_{pq,\varrho}) &= \sum_1^n {}_\lambda (a^{(\varrho\lambda)})(a_{pq,\lambda}) \end{aligned}$$

einführen und beachten, daß die Beziehungen:

$$(20) \qquad x_r^{(pq)} = \sum_1^n {}_\varrho (b_{pq,\varrho}) x_r^{(\varrho)} - \sum_1^n {}_{ik} b_{ik,r} x_i^{(p)} x_k^{(q)}$$
$$(p, q, r = 1, 2, \cdots, n)$$

bestehen, wo $x_r^{(pq)}$ die Ableitungen zweiter Ordnung der x_r nach den y_p sind. Wenn man ferner die Gleichungen (14) nach $u_{h'}$ differenziert, so ergibt sich:

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_h \partial u_{h'}} = \sum_1^n {}_{pq} x_r^{(pq)} \frac{\partial y_p}{\partial u_h} \frac{\partial y_q}{\partial u_{h'}} + \sum_1^n {}_p x_r^{(p)} \frac{\partial^2 y_p}{\partial u_h \partial u_{h'}}$$
$$(r = 1, 2, \cdots, n;\ h, h' = 1, 2, \cdots, m)$$

und wenn man hier die Werte (20) einsetzt und die kürzeren Bezeichnungen:

$$(22) \qquad \begin{aligned} x_{r,hh'} &= \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_h \partial u_{h'}} + \sum_1^n {}_{ik} b_{ik,r} \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_k}{\partial u_{h'}}, \\ y_{\sigma,hh'} &= \frac{\partial^2 y_p}{\partial u_h \partial u_{h'}} + \sum_1^n {}_{\varrho\sigma} (b_{\varrho\sigma,p}) \frac{\partial y_\varrho}{\partial u_h} \frac{\partial y_\sigma}{\partial u_{h'}} \end{aligned}$$

benutzt, so wird man die Gleichungen (21) auf die Form:

$$(23) \qquad x_{r,hh'} = \sum_1^n {}_p x_r^{(p)} y_{p,hh'}$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n;\ h, h' = 1, 2, \cdots, m)$$

bringen können. Es erhellt, daß man zu allen Fundamentalgrößen zweiten Ranges durch Elimination der $x_r^{(p)}$ aus den Gleichungen (2), (14) und (23) kommt.

Bei der Durchführung der Elimination müssen zwei Fälle auseinander gehalten werden. Wenn die Anzahl der Gleichungen (14) und (23) kleiner als n^2 oder gleich n^2 ist, d. h. wenn

$$\frac{m(m+3)}{2} \leqq n,$$

so wird man die bezüglichen Betrachtungen in derselben Weise wie für den ersten Rang durchführen können. Demnach ist in diesem Falle die Anzahl der Fundamentalgrößen zweiten Ranges gleich:

$$\frac{m(m+3)}{4}\left[\frac{m(m+3)}{2}+1\right] - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(m^2+5m+2)}{8}.$$

Im Falle aber, wenn die Anzahl der Gleichungen (14) und (23) größer als n^2 oder gleich n^2 ist, d. h. wenn:

$$\frac{m(m+3)}{2} \geqq n,$$

so wird man n^2 dieser Gleichungen dazu benutzen können, um aus denselben alle $x_r^{(p)}$ zu bestimmen. Wenn man ferner die erhaltenen Ausdrücke für $x_r^{(p)}$ in die übrigen Gleichungen (14) und (23) und in die Gleichungen (2) einsetzt, so bekommt man Beziehungen, welche alle Fundamentalgrößen ersten und zweiten Ranges liefern. Demnach ist in dem zweiten Falle die Anzahl voneinander unabhängiger Fundamentalgrößen zweiten Ranges gleich:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{m(m+3)}{2} - n^2 - \frac{m(m+1)}{2} = n\frac{m(m+3)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Wenn man nun zu höheren Rangen übergeht, so kann die Behandlung unserer Frage mit Hilfe der Bemerkung erhalten werden,

daß aus den Gleichungen γ_0 und γ_2 alle $x_r^{(p)}$ bestimmt werden können. Demnach ist im Falle:

$$\frac{m(m+3)}{2} \leqq n$$

die Anzahl der Fundamentalgrößen dritten Ranges gleich:

$$n\left[\frac{m(m+3)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\right] - \frac{m(m+3)}{4}\left[\frac{m(m+3)}{2} + 1\right]$$

und im Falle:

$$\frac{m(m+3)}{2} \geqq n$$

ist die Anzahl dieser Fundamentalgrößen gleich:

$$n\frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die Anzahl der Fundamentalgrößen l-ten Ranges ist für $l \geqq 4$ in allen Fällen gleich:

$$n\frac{(m+l-1)!}{(m-1)!\,l!}.$$

Wir wollen noch hier in bezug auf die Fundamentalgrößen dasjenige Klassifikationsprinzip in Anwendung bringen, nach welchem wir in § 3 die Differentialparameter eingeteilt haben. Der Analogie halber glauben wir uns auf die Angabe der Resultate beschränken zu dürfen, welche wir in folgender Tabelle zusammenstellen:

	1	2	3	4	5
0	$\frac{m(m+1)}{2}$	0	0	0	0
1	0	$\mathfrak{a}$	0	0	0
2	$mn - \frac{m(m+1)}{2}$	$\mathfrak{b}$	$n\frac{(m+2)!}{(m-1)!\,3!}$	0	0
3	0	0	0	$n\frac{(m+3)!}{(m-1)!\,4!}$	0
4	0	0	0	0	$n\frac{(m+4)!}{(m-1)!\,5!}$
5	0	0	0	0	0

Es müssen noch hier die Werte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ angegeben werden. $\mathfrak{a}$ ist die Anzahl der Fundamentalgrößen zweiten Ranges, d. h. wir haben

$$\mathfrak{a} = \frac{m(m+1)(m^2+5m+2)}{8}$$

bei $\frac{m(m+3)}{2} \leqq n$ und

$$\mathfrak{a} = n\frac{m(m+3)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}$$

bei $\frac{m(m+3)}{2} \geqq n$. Man sieht ferner leicht, daß

$$\mathfrak{b} = n\frac{m(m+1)}{2} - \mathfrak{a}$$

und wir erhalten also bei $\frac{m(m+3)}{2} \leqq n$ die Zahl:

$$\mathfrak{b} = \frac{m(m+1)}{2}\left[n - \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(m-1)(m+2)}{4}\right]$$

und bei $\frac{m(m+3)}{2} \geqq n$ die Zahl:

$$\mathfrak{b} = \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}.$$

Hiermit sind die Fundamentalgrößen mit möglichst niedrigen Ordnungen zweier Systeme von Differentialquotienten angezeigt.

§ 6.

In der vorigen Nummer haben wir gesehen, daß die Größen:

$$(24) \qquad e_{\varrho\sigma} = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho}\frac{\partial x_s}{\partial u_\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, m)$$

Fundamentalgrößen sind. Auf dieselbe Weise läßt sich leicht einsehen, daß auch die Größen:

$$(25) \qquad e_{\varrho\sigma,\tau} = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}x_{r,\varrho\sigma}\frac{\partial x_s}{\partial u_\tau} \qquad (\varrho, \sigma, \tau = 1, 2, \cdots, m)$$

und die Größen:

$$(26) \qquad e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}x_{r,\varrho\sigma}x_{s,\varrho'\sigma'} \quad (\varrho, \sigma, \varrho', \sigma' = 1, 2, \cdots, m)$$

Fundamentalgrößen sind. Wir wollen uns nun mit einigen Eigenschaften dieser Fundamentalgrößen beschäftigen.

Zunächst ist es klar, daß alle Ableitungen der $e_{\varrho\sigma}$ nach den u_τ auch Fundamentalgrößen sind. Man hat aber:

$$\frac{\partial e_{\varrho\tau}}{\partial u_\tau} = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_\varrho \partial u_\tau} \frac{\partial x_s}{\partial u_\sigma} + \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{\partial^2 x_s}{\partial u_\sigma \partial u_\tau} \frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho}$$

$$+ \sum_1^n {}_{rst} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} \frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho} \frac{\partial x_s}{\partial u_\sigma} \frac{\partial x_t}{\partial u_\tau}$$

und wenn man hier auf Grund der ersten Gruppe der Gleichungen (22) die Größen $x_{r,\varrho\tau}$ und $x_{s,\sigma\tau}$ einführt und dabei sowohl die Beziehungen:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} = a_{rt,s} + a_{st,r}$$

wie auch die erste Gruppe der Beziehungen (19) ausnutzt, so gelangt man auf Grund der Beziehungen (25) zu den Relationen:

$$\frac{\partial e_{\varrho\sigma}}{\partial u_\tau} = e_{\varrho\tau,\sigma} + e_{\sigma\tau,\varrho}, \qquad (\varrho, \sigma, \tau = 1, 2, \ldots, m$$

aus welchen sich leicht die Relationen:

$$e_{\varrho\sigma,\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{\varrho\tau}}{\partial u_\sigma} + \frac{\partial e_{\sigma\tau}}{\partial u_\varrho} - \frac{\partial e_{\varrho\sigma}}{\partial u_\tau}\right)$$

ergeben.

Die Analogie der letzteren Entwicklungen zu den einleitenden Rechnungen in der Theorie der quadratischen Differentialform hat ihren Grund darin, daß sobald man in die Form φ für x_r Funktionen der Parameter $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ einsetzt, so ergibt sich:

$$(27) \qquad \bar{\varphi} = \sum_1^m {}_{\varrho\sigma} e_{\varrho\sigma} du_\varrho du_\sigma.$$

Man führe nun an Stelle der Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ neue Parameter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ein. Man kann sich zunächst denken, daß x_r durch die Parameter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ausgedrückt sind; alsdann ergibt sich aus der Form φ die Form:

$$(28) \qquad [\bar{\varphi}] = \sum_1^m {}_{\lambda\mu} [e_{\lambda\mu}] dv_\lambda dv_\mu,$$

in welcher

$$[e_{\lambda\mu}] = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda} \frac{\partial x_s}{\partial v_\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Es kann aber ferner die Form $[\overline{\varphi}]$ aus der Form $\overline{\varphi}$ durch Einführung an Stelle der Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ neuer Parameter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ erhalten werden. Wenn man die Bezeichnungen in der Weise wählt, daß:

$$du_\varrho = \sum_{1}^{m}{}_{\lambda}\, u_\varrho^{(\lambda)} dv_\lambda, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

so ergeben sich die Beziehungen:

$$[e_{\lambda\mu}] = \sum_{1}^{m}{}_{\varrho\sigma}\, e_{\varrho\sigma}\, u_\varrho^{(\lambda)}\, u_\sigma^{(\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{29}$$

Es ist für uns von Wichtigkeit, die Gleichungen anzuführen, welche aus den letzteren durch einmalige Differentiationen folgen. Diese fraglichen Gleichungen können auf Grund der bekannten Beziehungen der Transformationstheorie quadratischer Differentialformen angegeben werden. Wenn man nämlich das algebraische Komplement des Elementes $e_{\varrho\sigma}$ der Diskriminante der Form $\overline{\varphi}$, dividiert durch diese Diskriminante selbst mit $e^{(\varrho\sigma)}$ bezeichnet und für die analoge Größe der transformierten Form $[\overline{\varphi}]$ die Bezeichnung $[e^{(\lambda\mu)}]$ annimmt, und wenn man außerdem die Bezeichnungen:

$$\begin{gathered} g_{\varrho\sigma,\tau} = \sum_{1}^{m}{}_{p}\, e^{(\tau p)}\, e_{\varrho\sigma,p}, \\ [g_{\lambda\mu,\tau'}] = \sum_{1}^{m}{}_{q} [e^{(\tau' q)}]\, [e_{\lambda\mu,q}] \end{gathered} \tag{30}$$

benutzt, wo mit $[e_{\lambda\mu,q}]$ die den Größen $e_{\varrho\sigma,p}$ analogen Größen für die transformierte Form $[\overline{\varphi}]$ bezeichnet sind, so wird man die fraglichen Gleichungen in der Gestalt:

$$u_\varrho^{(\lambda\mu)} = \sum_{1}^{m}{}_{\nu} [g_{\lambda\mu,\nu}]\, u_\varrho^{(\nu)} - \sum_{1}^{m}{}_{ik}\, g_{ik,\varrho}\, u_i^{(\lambda)}\, u_k^{(\mu)} \tag{31}$$

$$(\lambda, \mu, \varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

darstellen können, wo mit $u_\varrho^{(\lambda\mu)}$ die Ableitung $\frac{\partial^2 u_\varrho}{\partial v_\lambda \partial v_\mu}$ benannt worden ist. Es erhellt, daß diese Gleichungen diejenigen sind, welche angeben, wie bei der betrachteten Transformation die Größen $e_{\varrho\sigma,\tau}$ transformiert werden.

Wir müssen noch Beziehungen aufstellen, welche angeben, wie bei der betrachteten Transformation die Fundamentalgrößen $e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'}$ transformiert werden. Zu dem Zwecke bemerke man, daß durch Differentiation der Gleichungen:

$$\frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda} = \sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho} u_\varrho^{(\lambda)} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} = \sum_1^m{}_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} u_\varrho^{(\lambda)} u_\sigma^{(\mu)} + \sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho} u_\varrho^{(\lambda\mu)}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

sich ergeben. Wenn man nun hier die erste Gruppe der Bezeichnungen (22) ausnutzt, ferner die analogen Bezeichnungen:

$$[x_{r,\lambda\mu}] = \frac{\partial^2 x_r}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} + \sum_1^n{}_{ik} b_{ik,r} \frac{\partial x_i}{\partial v_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial v_\mu}$$

in Anwendung bringt und endlich, die aus den Gleichungen (31) für $u_\varrho^{(\lambda\mu)}$ sich ergebenden Werte einsetzt, so kommt man auf die Relationen:

$$(32) \quad [x_{r,\lambda\mu}] - \sum_1^m{}_\nu [g_{\lambda\mu,\nu}] \frac{\partial x_r}{\partial v_\nu} = \sum_1^m{}_{\varrho\sigma} \left\{ x_{r,\varrho\sigma} - \sum_1^m{}_\tau g_{\varrho\sigma,\tau} \frac{\partial x_r}{\partial u_\tau} \right\} u_\varrho^{(\lambda)} u_\sigma^{(\mu)}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Es wird für die folgende Rechnung bequem sein die kürzeren Bezeichnungen:

$$X_{r,\varrho\sigma} = \sum_1^m{}_\tau g_{\varrho\sigma,\tau} \frac{\partial x_r}{\partial u_\tau},$$

$$[X_{r,\lambda\mu}] = \sum_1^m{}_\nu [g_{\lambda\mu,\nu}] \frac{\partial x_r}{\partial v_\nu}$$

zu benutzen. Aus den Beziehungen (32) ergeben sich die Beziehungen:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\,([x_{r,\lambda\mu}]-[X_{r,\lambda\mu}])([x_{s,\lambda'\mu'}]-[X_{s,\lambda'\mu'}]) =$$

$$=\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \sum_1^m {}_{\varrho\sigma\varrho'\sigma'} (x_{r,\varrho\sigma}-X_{r,\varrho\sigma})(x_{s,\varrho'\sigma'}-X_{s,\varrho'\sigma'})\, u_\varrho^{(\lambda)} u_\sigma^{(\mu)} u_{\varrho'}^{(\lambda')} u_{\sigma'}^{(\mu')}.$$

Es ist aber:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, x_{r,\varrho\sigma}\, x_{s,\varrho'\sigma'} = e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'},$$

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, x_{r,\varrho\sigma}\, X_{s,\varrho'\sigma'} = \sum_1^m {}_{\tau'}\, e_{\varrho\sigma,\tau'}\, g_{\varrho'\sigma',\tau'},$$

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, x_{s,\varrho'\sigma'}\, X_{r,\varrho\sigma} = \sum_1^m {}_{\tau}\, e_{\varrho'\sigma',\tau}\, g_{\varrho\sigma,\tau},$$

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, X_{r,\varrho\sigma}\, X_{s,\varrho'\sigma'} = \sum_1^m {}_{\tau\tau'}\, e_{\tau\tau'}\, g_{\varrho\sigma,\tau}\, g_{\varrho'\sigma',\tau'}$$

und die drei letzteren dieser Ausdrücke besitzen sämtlich denselben Wert:

$$\sum_1^m {}_{\tau\tau'}\, e^{(\tau\tau')}\, e_{\varrho\sigma,\tau}\, e_{\varrho'\sigma',\tau'}.$$

Es ist klar, daß für das transformierte System von Größen analoge Beziehungen stattfinden. Man sieht daher, daß sobald man noch die Bezeichnungen:

$$h_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} = e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} - \sum_1^m {}_{\tau\tau'}\, e^{(\tau\tau')}\, e_{\varrho\sigma,\tau}\, e_{\varrho'\sigma',\tau'}$$

$$(\varrho,\sigma,\varrho',\sigma'=1,2,\ldots,m)$$

einführt und für das transformierte System von Größen analoge Bezeichnungen mit Benutzung der eckigen Klammern in Anwendung bringt, wobei unter anderem:

$$[h_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}] = [e_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}] - \sum_1^m {}_{\nu\nu'}\, [e^{(\nu\nu')}]\, [e_{\varrho\sigma,\nu}]\, [e_{\varrho'\sigma,\nu'}],$$

so wird man die Beziehungen, welche angeben, wie die Fundamentalgrößen $e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'}$ transformiert werden, in der Form:

$$(33)\qquad [h_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}] = \sum_{1}^{m}{}_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} h_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'}\, u_{\varrho}^{(\lambda)}\, u_{\sigma}^{(\mu)}\, u_{\varrho'}^{(\lambda')}\, u_{\sigma'}^{(\mu')}$$

$$(\lambda, \mu, \lambda', \mu' = 1, 2, \ldots, m)$$

darstellen können.

Wir wollen noch hier einen für die Folge wichtigen Satz anführen. Es läßt sich nämlich beweisen, daß unter den Gleichungen (29) und (33) jedenfalls m^2 derartige vorhanden sind, die in bezug auf die m^2 Größen $u_{\varrho}^{(\lambda)}$ auflösbar sind. Man bilde zu dem Zwecke die Differentiale der rechten Seiten der Beziehungen (29) und (33), wobei man nur die Größen $u_{\varrho}^{(\lambda)}$ als Veränderliche betrachtet. Unter Benutzung der Bezeichnung:

$$d u_{\varrho}^{(\lambda)} = \eta_{\varrho\lambda}$$

ergibt sich:

$$d[e_{\lambda\mu}] = \sum_{1}^{m}{}_{\varrho\sigma} e_{\varrho\sigma} (u_{\sigma}^{(\mu)} \eta_{\varrho\lambda} + u_{\varrho}^{(\lambda)} \eta_{\sigma\mu}) \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

$$d[h_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}] = \sum_{1}^{m}{}_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} h_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} (u_{\sigma}^{(\mu)} u_{\varrho'}^{(\lambda')} u_{\sigma'}^{(\mu')} \eta_{\varrho\lambda} + u_{\varrho}^{(\lambda)} u_{\sigma'}^{(\lambda')} u_{\varrho'}^{(\mu')} \eta_{\sigma\mu} +$$
$$+ u_{\varrho}^{(\lambda)} u_{\sigma}^{(\mu)} u_{\sigma'}^{(\mu')} \eta_{\varrho'\lambda'} + u_{\varrho}^{(\lambda)} u_{\sigma}^{(\mu)} u_{\varrho'}^{(\lambda')} \eta_{\sigma'\mu'})$$

$$(\lambda, \mu, \lambda', \mu' = 1, 2, \ldots, m).$$

Wenn aus den Gleichungen:

$$(34)\qquad d[e_{\lambda\mu}] = 0, \quad d[h_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}] = 0$$

$$(\lambda, \mu, \lambda', \mu' = 1, 2, \ldots, m)$$

bei irgendwelchen speziellen Annahmen und unter Betrachtung der $\eta_{\varrho\lambda}$ als unbekannte Größen, für diese Größen lauter Nullwerte sich ergeben, so folgt daraus, daß unter den Gleichungen (29) und (33) jedenfalls m^2 derartige vorhanden sind, für welche die Funktionaldeterminante in bezug auf die $u_{\varrho}^{(\lambda)}$ der in diesen Gleichungen rechter Hand befindlichen Ausdrücke nicht identisch gleich Null ist. Man wähle nun:

$$u_{\varrho} = v_{\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m).$$

Alsdann erhalten die Gleichungen (34) die Form:

$$(35)\begin{cases} \sum_{1}^{m}{}_{\varrho}(e_{\varrho\mu}\,\eta_{\varrho\lambda} + e_{\lambda\varrho}\,\eta_{\varrho\mu}) = 0 \\ \sum_{1}^{m}{}_{\varrho}(h_{\varrho\mu,\lambda'\mu'}\,\eta_{\varrho\lambda} + h_{\lambda\varrho,\lambda'\mu'}\,\eta_{\varrho\mu} + h_{\lambda\mu,\varrho\mu'}\,\eta_{\varrho\lambda'} + h_{\lambda\mu,\lambda'\varrho}\,\eta_{\varrho\mu'}) = 0 \\ \qquad (\lambda, \mu, \lambda', \mu' = 1, 2, \ldots, m)\,. \end{cases}$$

Es hat aber C. N. Haskins im § 6 seiner Arbeit „On the invariants etc. II." derartige weitere spezielle Annahmen getroffen, bei welchen man einsehen kann, daß aus den Gleichungen (35) lauter Nullwerte der Unbekannten $\eta_{\varrho\lambda}$ folgen. Man sieht also, daß unter den Gleichungen (29) und (33) in der Tat m^2 derartige existieren, welche in bezug auf alle Größen $u_{\varrho}^{(\lambda)}$ auflösbar sind.

§ 7.

Die Fundamentalgrößen treten unter anderem dann als Invarianten auf, wenn die Parameter u_{ϱ} nicht transformiert werden. Wir wollen nun voraussetzen, daß die Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in neue Parameter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ durch willkürliche Gleichungen transformiert werden. Alsdann können auch Invarianten betrachtet werden, welche unter anderem von den Ableitungen der Veränderlichen der n-fachen Mannigfaltigkeit in bezug auf die Parameter der m-fachen Mannigfaltigkeit abhängig sind. Wir wollen für dieselben die Benennung Differentialparameter zweiter Gattung benutzen.

Wenn eine derartige Invariante in den Veränderlichen x_r und den Parametern u_{ϱ} ausgedrückt ist, so wollen wir sie vom l-ten Range nennen, falls in derselben die a_{rs} und deren Differentialquotienten nur bis zur $(l-1)$-ten Ordnung inklusive, die Ableitungen der x_r nach den u_{ϱ} nur bis zur l-ten Ordnung inklusive auftreten und falls dieselbe von allen früher behandelten Differentialinvarianten und von allen denjenigen Differentialparametern unabhängig ist, in welchen die a_{rs} und deren Differentialquotienten nur bis zur $(l-2)$-ten Ordnung inklusive und die Ableitungen der x_r nach den u_{ϱ} nur bis zur $(l-1)$-ten Ordnung inklusive vorkommen. Wir wollen der Reihe nach zusehen, wie viele voneinander unabhängige Differentialparameter eines jeden Ranges existieren.

Es ist leicht zu sehen, daß Resultanten, welche auf Differential-

parameter zweiter Gattung ersten Ranges führen, falls derartige Resultanten überhaupt vorhanden sind, aus den Gleichungen:

$$(36)\qquad (a_{pq}) = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, x_r^{(p)}\, x_s^{(q)}, \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(37)\qquad \frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda} = \sum_{1}^{n}{}_{p}\, x_r^{(p)} \frac{\partial y_p}{\partial v_\lambda}, \quad (r = 1, 2, \cdots, n;\ \lambda = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(38)\qquad \frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda} = \sum_{1}^{m}{}_{\varrho} \frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho}\, u_\varrho^{(\lambda)}, \quad (r = 1, 2, \cdots, n;\ \lambda = 1, 2, \cdots, m)$$

durch Elimination der Größen $x_r^{(p)}$, $\frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda}$, $u_\varrho^{(\lambda)}$ folgen müssen. Wir wissen, daß man aus den Gleichungen (36) und (37)

$$\frac{n(n+1)}{2} + mn - \frac{m(m+1)}{2}$$

von den Größen $x_r^{(p)}$ bestimmen kann, und daß, wenn man die erhaltenen Ausdrücke in die übrigen dieser Gleichungen einsetzt, $\frac{m(m+1)}{2}$ Gleichungen, nämlich:

$$(39)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda} \frac{\partial x_s}{\partial v_\mu} = \sum_{1}^{n}{}_{pq}\, (a_{pq}) \frac{\partial y_p}{\partial v_\lambda} \frac{\partial y_q}{\partial v_\mu}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, m)$$

sich ergeben. Man setze nun hier aus den Gleichungen (38) die Werte der Ableitungen $\frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda}$ ein. Alsdann ergibt sich:

$$(40)\qquad \sum_{1}^{m}{}_{\varrho\sigma}\, e_{\varrho\sigma}\, u_\varrho^{(\lambda)}\, u_\sigma^{(\mu)} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} (a_{pq}) \frac{\partial y_p}{\partial v_\lambda} \frac{\partial y_q}{\partial v_\mu}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, m).$$

Da man aber aus dem letzteren Systeme die $u_\varrho^{(\lambda)}$ nicht eliminieren kann, so schließen wir daraus, daß keine Differentialparameter zweiter Gattung ersten Ranges existieren.

Wenn man zum zweiten Range übergeht, so sollen zu den früheren Gleichungen folgende Systeme von Gleichungen hinzugefügt werden:

$$(41) \qquad x_r^{(pq)} = \sum_1^n {}_l (b_{pq,l}) x_r^{(l)} - \sum_1^n {}_{ik} b_{ik,r} x_i^{(p)} x_k^{(q)},$$

$$(p, q, r = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(42) \qquad \frac{\partial^2 x_r}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} = \sum_1^n {}_{pq} \frac{\partial y_p \partial y_q}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} x_r^{(pq)} + \sum_1^n {}_p x_r^{(p)} \frac{\partial^2 y_p}{\partial v_\lambda \partial v_\mu},$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n;\ \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(43) \qquad \frac{\partial^2 x_r}{\partial v_\lambda \partial v_\mu} = \sum_1^m {}_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_\varrho \partial u_\sigma} u_\varrho^{(\lambda)} u_\sigma^{(\mu)} + \sum_1^m {}_\varrho \frac{\partial x_r}{\partial u_\varrho} u_r^{(\lambda,\mu)}.$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n;\ \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, m)$$

Außer den früheren Bezeichnungen wird es in der Folge bequem sein für das System von Veränderlichen y_p und v_λ den früheren analoge Bezeichnungen zu benutzen und das genannte Variabelnsystem dadurch zu kennzeichnen, daß man die bezüglichen Größen gleichzeitig mit eckigen und runden Klammern umgibt. Wenn man aus den Gleichungen (41) die Werte $x_r^{(pq)}$ in die Gleichungen (42) einsetzt und alsdann aus denselben und den Gleichungen (36) und (37) die Elimination der Ableitungen $x_r^{(p)}$ vornimmt, so erhält man außer den Beziehungen (39) noch weitere Beziehungen, über welche im § 5 die Rede war. Wir haben im § 6 konstatiert, daß zu denselben jedenfalls die Beziehungen:

$$(44) \qquad ([e_{\varrho,\sigma\tau}]) = [e_{\varrho,\sigma\tau}] \qquad (\varrho, \sigma, \tau = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(45) \qquad ([e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'}]) = [e_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'}] \qquad (\varrho, \sigma, \varrho', \sigma' = 1, 2, \cdots, m)$$

angehören und wir gehen hier darauf nicht ein, ob diese Beziehungen die Gesamtheit der auf diese Weise sich ergebenden Beziehungen ausmachen und ob sie alle voneinander unabhängig sind. Diese Fragen sind im § 6 der erwähnten zweiten Abhandlung von C. N. Haskins behandelt worden. Führt man weiter das Eliminationsverfahren in der Weise, daß man in die Beziehungen (44) und (45) die Werte der Ableitungen $\frac{\partial^2 x_r}{\partial v_\lambda \partial v_\mu}$ aus (43) einsetzt, so wird man das aus den Beziehungen (44) folgende Resultat in der Form:

$$(46) \qquad u_\varrho^{(\lambda\mu)} + \sum_1^m {}_{ik} g_{ik,\varrho} u_i^{(\lambda)} u_k^{(\mu)} = \sum_1^m {}_\nu ([g_{\lambda\mu,\nu}]) u_\varrho^{(\nu)}$$

$$(\varrho, \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, m)$$

darstellen können und vermöge dieses Resultates wird man aus den Beziehungen (45) die Beziehungen:

$$(47) \qquad ([h_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}]) = \sum_{1}^{m} {}_{\varrho\sigma\varrho'\sigma'} h_{\varrho\sigma,\varrho'\sigma'} u_{\varrho}^{(\lambda)} u_{\sigma}^{(\mu)} u_{\varrho'}^{(\lambda')} u_{\sigma'}^{(\mu')}$$

$$(\lambda, \mu, \lambda', \mu' = 1, 2, \cdots, m)$$

erhalten. Wenn man nun noch die Relationen (40) anführt, welche in der Form:

$$(48) \qquad ([e_{\lambda\mu}]) = \sum_{1}^{m} {}_{\varrho\sigma} e_{\varrho\sigma} u_{\varrho}^{(\lambda)} u_{\sigma}^{(\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, m)$$

dargestellt werden können nnd bedenkt, daß unter den Gleichungen (47) und (48) jedenfalls m^2 derartige vorhanden sind, die in bezug auf die Größen $u_{\varrho}^{(\lambda)}$ aufgelöst werden können, so wird man in der Lage sein, die Anzahl der Differentialparameter zweiter Gattung und zweiten Ranges anzugeben.

Wir betrachten zunächst den Fall:

$$\frac{m(m+3)}{2} \leqq n.$$

Die Anzahl der Fundamentalgrößen ersten und zweiten Ranges ist in diesem Falle gleich:

$$\frac{m(m+3)}{4}\left[\frac{m(m+3)}{2} + 1\right];$$

da aber die Anzahl der Ableitungen $u_{\varrho}^{(\lambda)}$ und $u_{\varrho}^{(\lambda\mu)}$ gleich:

$$m^2 + \frac{m^2(m+1)}{2}$$

ist, so ist die Anzahl der Differentialparameter zweiter Gattung zweiten Ranges gleich:

$$\frac{m(m+3)(m^2-m+2)}{8}.$$

Im Falle:

$$\frac{m(m+3)}{2} \geqq n$$

ist die Anzahl der Fundamentalgrößen ersten und zweiten Ranges gleich:

$$n\frac{m(m+3)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$$

und daher ist die Anzahl der Differentialinvarianten zweiter Gattung und zweiten Ranges gleich:

$$(n-m)\frac{m(m+3)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Indem wir nun zu höheren Rangen übergehen, so ist auf Grund der früheren Betrachtungen ersichtlich, daß für einen Rang $l \geqq 3$ die Anzahl der Differentialparameter zweiter Gattung gleich der Anzahl der Fundamentalgrößen des Ranges l ist, vermindert um die Anzahl der Differentialquotienten l-ter Ordnung der u_ϱ nach den v_λ. Demnach ist im Falle:

$$\frac{m(m+3)}{2} \leqq n$$

die Anzahl der Differentialparameter zweiter Gattung und dritten Ranges gleich:

$$(n-m)\frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{m(m+3)}{2}\left\{n - \frac{(m+1)(m+2)}{4}\right\}$$

und im Falle:

$$\frac{m(m+3)}{2} \geqq n$$

gleich:

$$(n-m)\frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die Anzahl dieser Differentialparameter l-ten Ranges bei $l \geqq 4$ ist gleich:

$$(n-m)\frac{(m+l-1)!}{(m-1)!\,l!}.$$

Es erübrigt noch, für die Differentialparameter zweiter Gattung eine Untersuchung durchzuführen, welche denjenigen analog wäre, die wir im § 3 und am Schlusse des § 5 durchgeführt haben. Wir wollen zunächst die Resultate in einer Tabelle zusammenstellen und ferner werden wir die Beweisgründe dieser Resultate anführen. Man erhält die Tabelle:

	1	2	3	4	
0	0	0	0	0	
1	0	$\mathfrak{a}'$	0	0	
2	$m(n-m)$	$\mathfrak{b}'$	$(n-m)\frac{(m+2)!}{(m-1)!\,3!}$	0	
3	0	0	0	$(n-m)\frac{(m+3)!}{(m-1)!\,4!}$	
4	0	0	0	0	

wo in der ersten Vertikalreihe die Ordnungen der Differentialquotienten der a_{ik}, in der ersten Horizontalreihe die Ordnungen der Differentialquotienten der Koordinaten nach den Parametern angebracht sind. Die Zahlen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ besitzen folgende Bedeutung. Wenn

$$\frac{m(m+3)}{2} \leqq n,$$

so ist:

$$\mathfrak{a}' = \frac{m(m+3)(m^2-m+2)}{8},$$

$$\mathfrak{b}' = (n-m)\frac{m(m+1)}{2} - \frac{m(m+3)(m^2-m+2)}{8}$$

und wenn

$$\frac{m(m+3)}{2} \geqq n,$$

so haben wir:

$$\mathfrak{a}' = (n-m)\frac{m(m+3)}{2} - \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\mathfrak{b}' = \frac{n(n-1)}{2} - m(n-m).$$

Indem wir zu den Beweisgründen übergehend, dem Symbole (A, B) analoge Bedeutung wie im § 3 beilegen, bemerken wir zunächst, daß $(0,1) = 0$, wie wir früher konstatiert haben. Um die Anzahl $(0,2)$ zu bestimmen, sollen außer den Gleichungen (36), (37) und (39) die Gleichungen (42) und (43) betrachtet werden. Da man aus diesem Systeme die Differentialquotienten $x_r^{(pq)}$ nicht eliminieren

kann, so ergibt sich $(0,2) = 0$ und es ist leicht zu sehen, daß auch bei beliebigem B:

$$(0, B) = 0 .$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß aus den Gleichungen (36), (37), (38) und (41) alle in denselben vorkommenden willkürlichen Größen nicht eliminiert werden können, daß also: $(1, 1) = 0$. Ferner ist auch klar, daß $(1, 2)$ gleich der Anzahl der Differentialparameter zweiter Gattung zweiten Ranges ist und schließlich hat man für $B > 2$

$$(1, B) = 0 ,$$

denn es wird nicht möglich sein aus den in Betracht kommenden Gleichungen die Elimination der Differentialquotienten der x_r nach den y_p dritter und höherer Ordnungen zn bewirken.

Wir wissen, daß die Gleichungen (36) und (4) in bezug auf n^2 Größen $x_r^{(p)}$ aufgelöst werden können und daß die Elimination dieser Größen aus den genannten Gleichungen eine Anzahl von Differentialinvarianten liefert. Wenn man anderseits die erhaltenen Lösungen für $x_r^{(p)}$ in die Gleichungen (37) und (38) einsetzt, so wird man aus denselben noch alle $\frac{\partial x_r}{\partial v_\lambda}$ und $u_\varrho^{(\lambda)}$ eliminieren können und man gelangt zu $m(n-m)$ Beziehungen. Man hat daher:

$$(2, 1) = m(n - m) .$$

Fügt man ferner noch die Gleichungen (41), (42) und (43) hinzu, so ist ersichtlich, daß auch in diesen die Entfernung der zu eliminierenden Größen möglich ist, und daß man bekommt:

$$(2, 2) = (n - m) \frac{m(m+1)}{2} - (1, 2) .$$

In ähnlicher Weise ist es leicht zu sehen, daß

$$(2, 3) = (n - m) \frac{(m+2)(m+1)m}{6}$$

und daß für $B > 3$:

$$(2, B) = 0 .$$

Schließlich werden in derselben Weise die Zahlen weiterer Zeilen der Tabelle aufgestellt.

Druckfertig erklärt am 17. II. 1908.

SITZUNG VOM 2. DEZEMBER 1907.

Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche.

Zweite Abhandlung.

Von

C. NEUMANN.

Transformiert man eine gegebene *Ellipse* nach der Methode der reziproken Radien, so wird die so entstehende neue Kurve, welche kurzweg ein *Oval*[1]) heißen mag, sehr verschiedene Gestalten besitzen können, je nach der Lage des Transformationszentrums.

Wir denken uns nun eine von einem solchen Oval umgrenzte *homogene materielle ebene Fläche,* und stellen uns die Aufgabe, die Einwirkung dieser materiellen Fläche auf *äußere Punkte*, unter Zugrundelegung der Theorie des logarithmischen Potentials, näher zu untersuchen. Dabei soll selbstverständlich nur von solchen Punkten die Rede sein, die in der Ebene der materiellen Fläche gelegen sind.

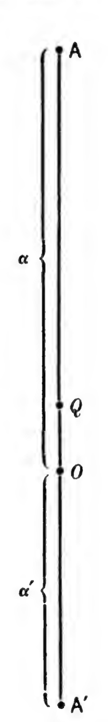
Man kann zunächst etwa den speziellen Fall ins Auge fassen, daß das Transformationszentrum im *Mittelpunkt* der Ellipse liegt. Alsdann wird die betreffende materielle Ovalfläche, in ihrer Wirkung auf äußere Punkte, ersetzbar sein durch *zwei einzelne feste Massenpunkte;* — wie solches von mir bereits früher dargelegt worden ist, in meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand[2]).

Ich gehe sofort über zu einem andern Spezialfall, indem ich gegenwärtig jenes Transformationszentrum hineinfallen lasse in den einen *Brennpunkt* der gegebenen Ellipse. In diesem Falle wird die

1) Der Name „*Oval*" ist ziemlich willkürlich gewählt. Doch findet derselbe — wenigstens für den speziellen Fall, daß das Transformationszentrum im *Mittelpunkt* der Ellipse liegt — einen gewissen Stützpunkt in einer schon früher üblich gewordenen Bezeichnungsweise. Vgl. diese Berichte 1907. S. 288.

2) In diesen Berichten 1907. S. 278—312.

betreffende materielle Ovalfläche, in ihrer Wirkung auf äußere Punkte ersetzbar sein durch *einen einzigen festen materiellen Punkt;* wobei aber sogleich hinzugefügt werden muß, daß dieser materielle Punkt von ziemlich komplizierter Beschaffenheit ist, daß er nämlich zusammengesetzt ist aus einem *materiellen einfachen Punkt* und aus einem *materiellen Doppelpunkt.*



Auf die wirkliche Ableitung oder Begründung dieser Angaben will ich einstweilen *nicht* näher eingehen. Wohl aber möchte ich diese Angaben selber im folgenden etwas genauer und ausführlicher darzustellen mich bemühen.

In beistehender Figur sei O das (nach unserer Voraussetzung mit dem einen Brennpunkt der gegebenen Ellipse koinzidierende) *Transformationszentrum;* und die durch O gehende Linie sei die *Symmetrieachse* der zu betrachtenden Ovalfläche. Ferner seien A und A′ die beiden *Scheitelpunkte* der Ovalfläche, nämlich diejenigen beiden Punkte, in denen der Rand dieser Fläche von der Symmetrieachse getroffen wird. Dabei denke man sich die Bezeichnung so gewählt, daß O weiter entfernt ist von A, als von A′.

Die Abstände $(O\mathsf{A})$ und $(O\mathsf{A}')$ mögen mit α und α' bezeichnet werden:

$$(1)\qquad \alpha = (O\mathsf{A}) \quad \text{und} \quad \alpha' = (O\mathsf{A}');$$

ferner werde gesetzt:

$$(2)\qquad \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha'}\right)^2.$$

Beiläufig bemerkt, besitzt alsdann der *Flächeninhalt* Φ des Ovals den Wert:

$$(3)\qquad \Phi = \frac{\pi}{8}\left[2\,(\alpha + \alpha')^2 + (\alpha - \alpha')^2\right].$$

Bezeichnet man also die *Gesamtmasse* der von dem Oval umgrenzten homogenen materiellen Fläche mit M, so ist:

$$(4)\qquad \mathsf{M} = \varepsilon\Phi = \frac{\pi\varepsilon}{8}\left[2\,(\alpha + \alpha')^2 + (\alpha - \alpha')^2\right],$$

wo ε die konstante Flächendichtigkeit vorstellt.

Man markiere nun zwischen O und A einen Punkt Q, der von O den Abstand hat:

$$(5)\qquad (OQ) = \frac{\alpha - \alpha'}{4}.$$

Alsdann wird das *Potential* V der materiellen Ovalfläche in bezug auf irgend einen äußeren Punkt folgenden Wert besitzen:

$$(6)\qquad V = \mathsf{M} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) + \mathsf{M}\left(\frac{\alpha - \alpha'}{4(1+\delta)}\right)\frac{d}{d\nu}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

Hier bezeichnet Δ den Abstand des sollizitierten äußeren Punktes vom festen Punkte Q. Und ν bezeichnet die von Q ausgehende Richtung $Q\mathsf{A}$.

Daß der hier in (6) für das Potential V gegebene Ausdruck mit jenen vorhin von mir gemachten Angaben in Einklang ist, übersieht man leicht. Denn der erste Teil des Ausdruckes, nämlich:

$$(7)\qquad \mathsf{M} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)$$

ist zu bezeichnen als das Potential eines in Q befindlichen *einfachen Punktes* von der Masse M. Und andrerseits wird der zweite Teil des Ausdruckes, nämlich:

$$(8)\qquad \mathsf{M}\left(\frac{\alpha - \alpha'}{4(1+\delta)}\right)\frac{d}{d\nu}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)$$

zu bezeichnen sein als das Potential eines in Q befindlichen *Doppelpunktes* vom Momente $\mathsf{M}\left(\frac{\alpha - \alpha'}{4(1+\delta)}\right)$; wobei noch hinzugefügt werden kann, daß die Richtung dieses Momentes von Q nach A geht[1]).

Bemerkung. — Bei dem Bestreben, meine Untersuchungen auf Ovale auszudehnen, bei denen die Lage des Transformationszentrums O im Innern der von Hause aus gegebenen Ellipse eine ganz *beliebige* ist, bin ich zu einer einfachen Formel für den Flächeninhalt Φ eines solchen Ovals gelangt. Die Formel lautet:

$$(9)\qquad \Phi = \frac{\pi}{4}\left(\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2\right).$$

---

1) Ein *materieller Doppelpunkt* besteht aus zwei einander entgegengesetzten Massen $-m$ und $+m$, deren gegenseitiger Abstand r unendlich klein ist. Das *Moment* eines solchen Doppelpunktes ist bekanntlich dargestellt durch das Produkt mr. Ferner wird unter der *Richtung* dieses Momentes die Linie r zu verstehen sein, dieselbe fortlaufend gedacht von $-m$ zu $+m$. Ist, wie im vorliegenden Fall, der Wert des Momentes ein *endlicher*, so wird, weil r unendlich klein sein soll, der Wert von m unendlich groß zu denken sein.

Hier bezeichnen α, α' und β, β' diejenigen Segmente, welche das Oval abschneidet auf zwei durch O gehenden und zu den Hauptachsen der Ellipse parallelen geraden Linien.

Man denke sich nun, um zu einem spezielleren Fall überzugehen, den Punkt O gelegen auf derjenigen Ellipsenachse, welche durch die beiden Brennpunkte der Ellipse geht; so daß also die Segmente α und α' in die Linie dieser Achse hineinfallen. Alsdann erhält man ein in bezug auf diese Achse symmetrisches Oval; so daß also z. B. $\beta = \beta'$ sein wird; wodurch die Formel (9) übergeht in:

$$\Phi = \frac{\pi}{4}(\alpha^2 + \alpha'^2 + 2\beta^2). \tag{9a}$$

Läßt man jetzt endlich, um den betrachteten Fall noch weiter zu spezialisieren, den Punkt O mit dem einen Brennpunkt koinzidieren, so wird, wie sich leicht ergibt, $2\beta = \alpha + \alpha'$ sein; wodurch alsdann die Formel (9a) übergeht in:

$$\Phi = \frac{\pi}{4}[\alpha^2 + \alpha'^2 + \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')^2]; \tag{9b}$$

und diese Formel ist, wie man sofort übersieht, identisch mit der vorhin angewendeten Formel (3).

Ist die von Hause aus gegebene Ellipse ein *Kreis*, so wird das durch die Methode der reziproken Radien entstehende Oval bekanntlich ebenfalls ein *Kreis* sein. Demgemäß ergibt sich aus der Formel (9) ein (vielleicht neuer) Satz über den Kreis, der folgendermaßen lautet:

Durch einen gegebenen Kreis seien gelegt irgend zwei zueinander senkrechte gerade Linien; und zwar mag der Schnittpunkt O dieser beiden Linien innerhalb des Kreises liegen. Alsdann wird der Flächeninhalt Φ des Kreises den Wert haben:

$$\Phi = \frac{\pi}{4}(\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2); \tag{10}$$

hier sind α, α' und β, β' die vom Kreise auf jenen beiden Linien abgeschnittenen Segmente.

Einigermaßen überraschend dürfte sein, daß dieser Satz (10) auch dann noch gilt, wenn der Schnittpunkt O der beiden Linien *außerhalb* des Kreises liegt. Alsdann werden allerdings *zwei* von den Segmenten α, α', β, β', vielleicht auch *alle vier* imaginär. Aber die Formel (10) erweiset sich trotzdem als richtig.

Druckfertig erklärt 14. II. 1908.]

SITZUNG VOM 13. JANUAR 1908.

Neunter Bericht der Erdbebenstation Leipzig.

$51^{0} 20' 6''$ nördl. Br., $49^{m} 34^{s}$ östlich von Greenwich.

I. Die in Leipzig und Plauen vom 1. Juli bis 31. Dezember 1907 aufgezeichneten Seismogramme.

II. Die in Leipzig vom 1. Juli bis 31. Dezember 1907 aufgezeichneten pulsatorischen und sonstigen nicht seismischen Bewegungen.

Von

FRANZ ETZOLD.

Mit einer Tafel.

Der vorliegende neunte Bericht der Erdbebenstation Leipzig umfaßt das Halbjahr vom 1. Juli bis 31. Dezember 1907 und ist den an dieser Stelle seit 1902 veröffentlichten acht vorhergehenden Berichten vollkommen entsprechend abgefaßt. Im zweiten Halbjahr 1907 wurden durch WIECHERTS Pendelseismometer in Leipzig 57 Erdstöße aufgezeichnet, deren Epizentralgebiete, wie auch früher stets, über den ganzen Erdball verstreut sind. In Sachsen sind während der Berichtszeit zwar von Menschen keine Erderschütterungen wahrgenommen worden, wohl aber hat das wesentlich feinfühligere Seismometer zwei solche verzeichnet, die sogar nach der Art, wie sie sich scharf mit dem weitesten Ausschlage aufzuzeichnen begonnen haben, in unmittelbarer Nähe vom Seismometerstandort stattgefunden haben dürften. Gegenüber diesen winzigen Erzitterungen haben mehrere der aufgezeichneten Erdbeben eine sehr beträchtliche Schütterkraft entwickelt. So wurde am 1. Juli, 2. September, 16. Oktober und 30. Dezember der Seismometerstandort durch aus großer Ferne kommende Erdbebenwellen stundenlang in Unruhe versetzt. Welche Energie die sie erzeugenden Erdstöße in ihren Epizentralgebieten entwickelt haben, wissen wir nicht, da sich

die letzteren augenscheinlich in unkultivierten Gegenden oder im Untergrunde des Ozeans befinden. Das größte Aufsehen durch verheerende Schütterstärke haben die Beben erregt, welche sich am 21. Oktober in Turkestan und am 23. Oktober in Calabrien ereignet und in Leipzig in großer Schärfe aufgezeichnet haben. Die Seismogramme derselben sind auf der beigegebenen Tafel abgebildet worden, zum Vergleich wurde ihnen die seismometrische Aufzeichnung eines Erdstoßes beigefügt, der am 1. August schadlos in Ljubinje (Herzegovina) verlief (vgl. die Tafelerklärung S. 76).

Die Unterbrechungen in der Beobachtung, die keiner mit nur einem Instrument arbeitenden Station erspart bleiben können, wurden nicht durch das Seismometer selbst, sondern durch die Uhr und durch das Triebwerk für das Registrierpapier hervorgerufen. Sie konnten stets rasch behoben werden und umfassen die Zeit vom 21. Juli $13^h 47^m$ bis 22. Juli $8^h 50^m$, vom 17. August $12^h 52^m$ bis 18. August $11^h 25^m$ und vom 21. August $20^h 29^m$ bis 22. August 9^h.

Das kleinere in *Plauen* stehende Seismometer hat während der Berichtszeit ohne Unterbrechung funktioniert. Wie bereits oben angegeben, konnte es zwar seine eigentliche Bestimmung, vogtländische Erdstöße zu registrieren, noch immer nicht erfüllen, dagegen hat es im vergangenen Halbjahr 10 Teleseismogramme geliefert, und war mit einem derselben — dem vom 2. September — imstande, die in Leipzig erhaltene unvollständige Aufzeichnung in ausgezeichneter Weise zu ergänzen. Diese Plauensche Registrierung vom 2. September läßt nicht nur die Haupt-, sondern auch die Vorphasen sehr genau erkennen und die nach ihr ermittelten Zeiten stimmen in befriedigendster Weise mit denen überein, welche der Göttinger Wochenbericht angibt.

I. Die in Leipzig und Plauen vom 1. Juli bis 31. Dezember 1907 aufgezeichneten Seismogramme (S. 61).

In der tabellarischen Zusammenstellung sind folgende Abkürzungen, welche denen der „Göttinger wöchentlichen Erdbebenberichte" entsprechen, angewendet worden:

Charakter des Erdbebens.

a) In bezug auf die Stärke seiner Aufzeichnung.

I = merklich,
II = auffallend,
III = stark.

b) In bezug auf die Lage des Herdes zum Beobachtungsort.

d = Ortsbeben (terrae motus domesticus), am Orte fühlbar.

v = Nahbeben (terrae motus vicinus), unter 1000 km.

r = Fernbeben (terrae motus remotus), 1000—5000 km.

u = sehr fernes Beben (terrae motus ultimus), über 5000 km.

Es bedeutet hiernach z. B. „I*u*": Ein sehr fernes Erdbeben hat sich so aufgezeichnet, daß die Registrierlinien durch die seismischen Schwingungen merklich gewellt erscheinen, daß also die Schreibnadeln um Beträge von etwa 1 mm zur Seite geführt worden sind.

Phasen.

P = erste Vorläufer (undae primae).

S = zweite Vorläufer (undae secundae).

L = Hauptbeben (undae longae).

M = besonders große Bewegungen im Hauptbeben (undae maximae).

C = Nachläufer (coda).

F = Erlöschen der sichtbaren Bewegung (finis).

Art der Bewegung.

i = Einsatz (impetus).

e = allmähliches Auftauchen (emersio).

Demnach bedeutet z. B. „*Pi*": Der erste Vorläufer setzt scharf mit einer Schwingung von meßbarer Größe ein, dagegen bedeutet „*Le*": Die langen Wellen des Hauptbebens entwickeln sich allmählich aus denen des zweiten Vorläufers (*S*), so daß man keine scharfe Abgrenzung zwischen beiden Phasen machen kann.

Maße der Schwingungen.

T bedeutet die Periode oder die doppelte Schwingungsdauer, dieselbe wird nach Sekunden angegeben.

A ist die Amplitude der Erdbewegung (Maß der wirklichen Bodenbewegung am Standorte des Seismometers), gerechnet von einer Seite zur anderen. A_{NS} ist die Amplitude für die Nordsüdkomponente, A_{OW} die Amplitude für die Ostwestkomponente. Als Grundmaß dient hier das Mikron (μ) = 0,001 mm.

II. Die in Leipzig vom 1. Juli bis 31. Dezember 1907 aufgezeichneten pulsatorischen und sonstigen nicht seismischen Bewegungen.

In Tabelle II, S. 75, sind die Amplituden (*A*) und Perioden (*T*) der während der Berichtszeit vom Leipziger Seismometer aufgezeichneten pulsatorischen Bewegungen zusammengestellt worden.

Wie in den früheren Berichten beziehen sich diese Angaben auf die Nachtstunden, auf die sich, wie bereits hervorgehoben (diese Berichte 1907, S. 29), jene schwachen, meist langandauernden und gleichmäßigen Bewegungen an vielen Tagen beschränken. Erlangen dieselben jedoch größere Energie, so halten sie auch tagsüber an. Dies war während des 2. Halbjahrs 1907 der Fall am 20. September (T 6, A 1—2 μ), am 17.—19. Oktober, am 14. bis 16. und 19.—23. November, am 3., 4., 9. (A bis 5 μ), 18.—24., 27. und 28. Dezember.

Wiederholt hat sich auch der Wind in störender Weise bemerklich gemacht, mehrmals vielleicht sogar Erdbebenaufzeichnungen vorgetäuscht. Eine Gewitterböe hat sich am 7. Juli sehr schön aufgezeichnet. Am 14. und 18. Juli waren die durch Sturm hervorgerufenen Gebäudeschwankungen so stark, daß ihre Aufzeichnung die von etwaigen seismischen Wellen bewirkte vollkommen verwischt haben würde (für den ersteren Tag melden die Göttinger Wochenberichte die gleiche Erscheinung). Am 19. Juli verursachte Wind bei der NS.-Komponente eine recht seismogrammähnliche Zeichnung. Gleiches geschah am 14. Dezember früh von $8^h 10^m$ an, wo sich bei der OW.-Komponente gleichzeitig kurze Schwingungen (T = 1 sek.) bemerkbar machten. Für am 6. Juli, 15. August und 15. Oktober registrierte Wellenbewegungen muß es schließlich dahingestellt bleiben, ob sie seismischer Natur oder auf Wind zu beziehen sind.

Die durch die Kirchtürme beim Läuten der Glocken verursachten Bodenschwingungen (vgl. diese Berichte 1904, S. 304) ließen sich bis in den Winter hinein stets deutlich auf den Registrierstreifen erkennen. Sie traten noch sehr klar am 23. und 24. Dezember hervor, waren aber in der Sylvesternacht auffallend schwach, da mittlerweile Frost eingetreten war, der sie, wie l. c. bemerkt, zeitweise zum völligen Verschwinden bringt.

Am 30. Dezember fand in Sedlitz bei Bilin eine große Felsensprengung statt, auf die Herr Prof. Spitaler (Prag) aufmerksam machte. Obwohl aber 400 kg Sprengstoff in einer Kammer zur Verwendung kamen, hat weder das Seismometer in dem 115 km von Sedlitz entfernten Plauen, noch das in dem 130 km entfernten Leipzig eine Spur verzeichnet.

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
1.	1. Juli	*IIIu*	*Pi*	14 21 42	< 1			Das Hauptbeben besteht aus einer Reihe von Wellenzügen, aus denen die angegebenen Maxima die kräftigste Einzelwelle bezeichnen. Auf dem Streifen der *NS*-Komponente erscheinen die Wellen des Hauptbebens eher als auf dem der *OW*-Komponente, welch letztere aber die kräftigere Aufzeichnung geliefert hat.
					9		1,2	
			i	14 25 48	5		3	
			Si	14 31 57	6		2,5	
				14 32 12	22		74	
				14 37 54	25		50	
			L_{NS}	14 45 38				
			L_{OW}	14 49 50				
			M	14 50 8	42		330	Von 16h 29m 30s an treten wieder ganz flache Wellen mit 20 sek. langen Perioden auf, dieselben sind bis 16h 45m verfolgbar.
			M	14 51 8	35	320		
			M	14 51 54	28		210	Auf dem *Plauen*schen Registrierstreifen sind nur einige schwächste Wellen sichtbar.
			M	14 54 30	20		80	
			M	14 56 23	20		60	
			M	14 59 17	20		60	
			M	15 1 38	18		50	
			M	15 6 57	18		35	
			M	15 9 31	20		34	
			C		15—12			
			F	16 10 —				
2.	2. Juli	*Iv*	*e*	3 33 31				*e* ist so schwach, daß die Messung nicht ganz sicher ist, ebenso beginnt *L* ganz allmählich; dagegen ist das *M*, dem 6 sek. später ein gleich starkes folgt, recht deutlich. Bei *NS* ist die Aufzeichnung ganz schwach.
			Le	3 34 24				
			M	3 34 30	1,75	1	1,5	
			F	3 36 20				
3.	2. Juli	*Iu*	*eL*	17 19 40	15	3	2	Sehr flache Wellen.
			F	17 45 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (MEZ) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
4.	3. Juli	*Iu*	*eL*	19 20 —	15	2	1	Sehr flache Wellen.
			M	19 26 —				
			F	19 42 —				
5.	4. Juli	*Iu*	*P*	1 31 18	1	<1	<1	Bei der Schwäche der Aufzeichnung ist keine Phasengliederung möglich. *P* besteht aus schwächsten, aber scharfen Zitterbewegungen, darauf folgen nur hin und wieder lange, ganz flache Wellen, die namentlich bei der *OW*-Komponente wegen der gleichzeitig aufgezeichneten pulsatorischen Bewegungen kaum erkennbar sind.
			Se (?)	1 38 20				
			F	2 45 —				
6.	4. Juli	*Iu*	*P*	10 26 20	ca. 1			Das Seismogramm tritt der Tagesstörungen wegen wenig hervor.
			Se	10 32 —	6	<1	<1	
			Le	10 42 —				
			M	10 44 15	20	10	9	
			F	11 50 —				
7.	4. Juli		*L*	23 45 30				Bei der *OW*-Komponente treten lange regelmäßige Wellen namentlich von $23^h\,46^m$ — $23^h\,48^m$ auf, bei *NS* ist zwar von denselben fast nichts zu bemerken, doch ist ein Zweifel an ihrer seismischen Natur kaum möglich.
			M	23 46 —	20			
			F	24 — —				
8.	5. Juli	*Iu*	*Pi*	16 57 44	2	1	1	Die seismischen Wellen sind wegen der übergelagerten Tagesstörungen wenig deutlich.
			Si	17 7 2	9	4	6	
			i	17 7 40	9	6,5		
			Le	17 25 —	ca. 30			
			M	17 27 18	30		16	
			C		12—10			
			F	18 30 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
9.	6. Juli		*Se* (?)	0 32 —				Die seismische Natur dieser Aufzeichnung ist nicht sicher. Für Sturm, an den noch gedacht werden könnte, würden die bei *OW* aufgezeichneten Wellen auffallend regelmäßig sein.
			Le (?)	0 46 —				
			F (?)	1 23 —				
10.	9. Juli	*IIu*	*Si*	20 17 39	8	1		In *Plauen* flache Wellen mit 15 sek. langen Perioden.
			Le	20 38 35	ca. 30			
			M	20 43 15	28	100	80	
			M	20 49 40	26	80		
			C		18 — 15			
			F	ca. 22 — —				
11.	19. Juli	*Iv*	*i*	1 29 59				Auf einen namentlich bei *OW* erkennbaren Einsatz (*i*) folgt *M* in Gestalt feinster scharfer Zähnelungen. Gefühlt in Krain.
			M	1 30 17	1	< 1	< 1	
			F	1 31 30				
12.	20. Juli	*Iu*	*Se*	15 2 2	ca. 6			Infolge der Tagesstörungen ist *P* nicht zu erkennen, auch *S* nicht scharf, weil sich mit ihm gleichzeitig die durch einen vorüberfahrenden Wagen verursachten Schwingungen aufgezeichnet haben.
			Le	15 22 45	60			
			M	15 26 5	50	65	50	
			M	15 31 20	30	90	70	
			M	15 38 20	24		45	
			F	16 50 —				
13.	29. Juli	*Iu*	*Le*	2 28 5	30		20	Lange flache Wellen mit allmählich abnehmender *P* u. *T* tauchen hin und wieder zwischen den Pulsationen auf.
			M	2 38 45	30		25	
			M	2 40 45	25	20		
			M	2 44 45	20			
			M	2 59 45	18		7,5	
			F	3 30 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
14.	29. Juli	*Iu*	*Le*	21 24 25				**Von 1h 24m 25s an werden in den Pulsationen die langen, flachen Wellen der Hauptphase eines Fernbebens sichtbar, die von 21h 34m an mitunter aussetzen und sich allmählich verlieren. Bei *NS* ist die Aufzeichnung erheblich durch Wind gestört.**
			M	21 25 35	25	18	15	
			F	ca. 22h — —				
15.	1. Aug.	*IIv*	*P* (?)	11 9 17	< 1	< 1		*P* ist wegen der Tagesstörungen nicht ganz sicher, eine winzige knopfartige Anschwellung bei der *NS*-Komponente wurde als solches aufgefaßt, da nach derselben zwischen den chronischen Erzitterungen mitunter etwas längere minimale Schwingungen auftreten. Von *Si*, also von 11h 10m 54s an gewinnen die seismischen Wellen die Herrschaft. Zunächst zeichnen sich nur kurze Schwingungen mit 1—1,5 sek. Periode auf und halten bis 11h 16m an. Sie lagern sich von 11h 11m 41s an über Wellen mit im Mittel 8 sek. langen Perioden. Innerhalb derselben läßt sich 11h 12m 25s auf beiden Komponenten, 11h 13m 21s auf der *OW*-Komponente und 11h 13m 39s auf der *NS*-Komponente je ein ruckartig einsetzendes Maximum erkennen, von denen das erste das bei weitem kräftigste ist. (Siehe Taf. I, Fig. 1a und 1b sowie Tafelerklärung S. 76). Das Epizentralgebiet des Stoßes lag in 1000 km Entfernung bei Ljubinje in der Herzegovina. Um 450 km demselben näher als Leipzig stehen die Seismometer in Wien. Haben die Hauptbebenwellen die oft beobachtete Geschwindigkeit von 3,5 km in der Sekunde gehabt, so gebrauchten sie bis Leipzig 4m 46s, bis Wien 2m 40s, demnach müßte der Beginn des Hauptbebens und das kräftige Maximum in Wien 2m 6s eher aufgezeichnet sein als in Leipzig, nämlich 11h 9m 35s und 11h 10m 19s. Die monatlichen Mitteilungen der K. K. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik für August 1907 geben 11h 9m 38s und 11h 10,5m an. Es ergibt sich also eine sehr gute Übereinstimmung der in Leipzig und Wien mit *Wiecherts* Seismometer erzielten Aufzeichnungen und gleichzeitig ein weiterer Beweis für die Geschwindigkeitszahl 3,5 km.
			Si	11 10 54	1	2	2	
			L	11 11 41	1,5			
					8			
			M	11 12 25	9	26	30	
			M	11 13 21	8		10	
			M	11 13 39	8	12		
			C		8—6			
			F	11 34 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
16.	5. Aug.	*Iu*	*Le*	3 40 —				Die in *Plauen* erhaltene Aufzeichnung ist wesentlich kräftiger als die des calabrischen Bebens vom 23. Oktober und weist in der Hauptphase zunächst ein kräftiges, dann 1,5 Min. später ein schwächeres Maximum auf.
			M	3 42 —	20	7	8	Flache, anfänglich lange, allmählich kürzer werdende Wellen.
			F	4 6 —				
17.	5. Aug.	*I*	*i* (? *S*)	8 3 20	14	8	28	Die Aufzeichnung ist durch Arbeiten im Seismometerraum gestört worden. Da um 8h 35m seismische Wellen bei *NS* fast fehlen, dagegen 8h 43m wieder recht deutlich werden, gehört die Registrierung vielleicht zu zwei Erdstößen.
			i	8 4 24	9	3		
			Le	8 23 —	25	25	22	
			M	8 33 —	20		20	
			F	9 26 —				
18.	6. Aug.	*Iv*	*Le*	16 26 30				
			M	16 27 55	1,25		2	
			F	16 29 —				
19.	9. Aug.	*Iu*	*Le*	20 51 35				Die Pulsationen verdecken die Vorläufer.
			M	20 55 35	25	18	25	
			F	21 30 —				
20.	13. Aug.	*Iv*	*P*	3 25 12				*P* ist der herrschenden pulsatorischen Bewegungen wegen nicht sicher.
			Le	3 27 20				
			M	3 28 2	12	2	2,5	
			F	3 40 —				
21.	13. Aug.	*Iu*	*Pe*	23 8 26	< 1	< 1	< 1	Der herrschenden Pulsationen wegen ist wenig zu erkennen und eine Phasengliederung unmöglich. Vielleicht rührt die Aufzeichnung von zwei fernen Stößen her. Von der Hauptphase sind nur hin und wieder wenige flache Wellen zu erkennen.
			i	23 9 55	< 1.1,5			
			Si (?)	23 17 37	8	1,5		
			M (?)	23 30 20	20		15	
			F	ca. 24 — —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
22.	15. Aug.			16 37 —	8	1	1	Von beiden Komponenten werden zwischen 16h 37m und 16h 38m längere Wellen aufgezeichnet, denen von 16h 40m-16h 44m unregelmäßige kürzere folgen, sich dann vereinzeln und allmählich verlieren. Die seismische Natur dieser Aufzeichnung ist nicht sicher, doch hat dieselbe auch keine Ähnlichkeit mit anderen bekannten Störungen.
				16 40 —	6	9	4	
				17				
23.	16. Aug.	*Id*	*M*	19 33 22				Ohne irgend welche Vorphase haben sich bei beiden Komponenten 6 Sekunden lang Schwingungen aufgezeichnet, deren Periode unmeßbar kurz ist. Die Ausschlagsweite auf dem Registrierpapier erreicht anfänglich 1 mm und schwächt sich rasch ab. Bis etwa 19h 34m sind dann unter den chronischen kurzen um eine Kleinigkeit längere Schwingungen bemerklich. Der in dieser Weise registrierte örtliche Stoß ist von Leipziger Bewohnern nicht gefühlt worden.
			F	19 34 —				
24.	22. Aug.	*Ir*	*P*	23 35 11	<1	<1	<1	Die ganze Aufzeichnung tritt wegen der Pulsationen nur sehr wenig hervor. Die Hauptphase besteht aus so flachen Wellen, daß dieselben nicht mit Sicherheit gemessen werden können.
			i	23 35 39	3	1		
			Si	23 44 40	6	2	0,5	
			i	23 45 37	6		2,5	
			L (?)	23 54 —				
	23. Aug.		*F*	ca. 1 — —				
25.	27. Aug.	*Iu*	*Le*	12 24 —				Flache, sich rasch abschwächende und etwas verkürzende Wellen.
			M	12 24 25	20	5	5	
				12 25 25				
			F	12 40				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
26.	29. Aug.	*Ir*		ca. 12 45 —				Die Zeitmarkierung hat versagt. Die Göttinger wöchentlichen Erdbebenberichte geben für *P* 11^h^ 45^m^ 30^s^ (Greenwich). Die Leipziger Aufzeichnung besteht aus einem 1. Vorläufer, der Wellen von weniger als 1 und von 2 sek. Periode aufweist und dem nach 5 Minuten flache Wellen mit 6 sek. Periode folgen. 7^m^ nach jenen ersten Vorläufern erscheinen wieder kurze Wellen (< 1 sek. Periode), nach weiteren 7 Minuten gefolgt von Wellen, deren Perioden allmählich von 10 auf 6 Sekunden herabsinken. Es ist hiernach anzunehmen, daß ein Doppelstoß in 2500—3000 km Entfernung stattgefunden hat.
27.	2. Sept.	*IIIu*	*P* *F*	ca. 17 15 — ca. 20 30 —				Das starke Erdbeben, welches in 9000—10000 km Entfernung stattgefunden haben muß, ist nicht vollständig aufgezeichnet worden, indem der Rahmen für die Zeitmarkierung etwas angehoben gewesen ist und die Indikatoren infolgedessen nicht immer das Papier erreicht haben. Die stärksten aufgezeichneten Wellen haben bei 40 sek. Periode Amplituden der Erdbewegung von 200 μ. In *Plauen* wurde dieses Beben sehr deutlich und scharf aufgezeichnet. Es ergibt sich dort folgende Phasengliederung: *Pi* 16^h^ 13^m^ 10^s^ *S* 16 23 15 *i* 16 28 40 *L* 16 40 — *P*=30 sek. *M* 16 54 — (5 kräftige Wellen, *P*=20 sek.) *M* 17 5 25 (*P*=15 sek.) *M* 17 17 — *M* 17 21 — *F* 18 — —

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
28.	15. Sept.	*II*	*P*	18 53 35	< 1			Weder *S* noch *L* sind deutlich zu erkennen, sondern werden durch etwa 18h 58m bereits erscheinende Wellen mit 6—8 sek. langen Perioden verwischt, die sich auch über die langen Wellen der Hauptphase lagern und namentlich bei *OW* so stark sind, daß sie die langen Wellen unmeßbar machen. In *Plauen* anfänglich kurze, rasche, dann allmählich auf 15—20 Sekunden Dauer sich verlängernde und ebenso wieder abnehmende Wellen.
					3		1	
			i	19 2 36	6	1		
			Le (?)	19 8 50	11	4		
			M	19 10 26	20	20		
					8			
			M	19 16 10	15		20	
			C		10—8			
			F	19 45 —				
29.	15. Sept.	*I*	*Pe*	20 22 15	< 1	< 1	< 1	Die Aufzeichnung ähnelt der vorhergehenden so, daß beide sicher von an gleichem Orte stattgefundenen Stößen herrühren.
			Le (?)	20 37 40				
			M	20 39 25	20	10		
			M	20 45 —	11		5	
			F	21 12 —				
30.	22. Sept.	*Iu*	*Se*	13 30 —				*L* ist nicht sicher, es ist möglich, daß längere unmeßbar flache Wellen vorhergehen
			Le (?)	13 54 20				
			M	13 54 50	20	10		
			M	14 — —	12	6		
			F	14 30 —				
31.	23. Sept.	*Iu*	*Se* (?)	22 52 —				
			Le	23 18 5				
			M	23 25 —	24		10	
			M	23 30 40	20		20	
			M	23 33 —	18	17		
			M	23 38 —	16	10	8	
			C		15—10			
	24. Sept.		*F*	0 12 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
32.	4. Okt.	*Iu*	*S*	— — —				Der Anfang ist durch den Papierwechsel verloren gegangen, von 12h 8m ab sind flache *S*-Wellen aufgezeichnet.
			Le	12 18 —	30	25		
			M	12 23 25	20	15	10	
			C		15—12			
			F	13 8 —				
33.	4. Okt.	*Iu*	*M*	22 14 40	18	6	8	Schon vor 22h 14m sind hier und da durch die Pulsationen hindurch einzelne flache Wellen erkennbar.
			F	22 41 —				
34.	6. Okt.	*Iu*	*Le*	2 11 20				Durch die Pulsationen hindurch werden hier und da flache lange Wellen sichtbar.
			M	2 18 20	18	4		
			F	2 40 —				
35.	10. Okt.	*Iu*	*i*	23 3 5	8		1,5	Das Seismogramm ist wegen der gleichzeitig aufgezeichneten Pulsationen schlecht zu erkennen. Am 11. Oktober 0h 40m — 0h 42m machen sich flache lange Wellen bemerklich, die möglicherweise einem anderen Fernbeben angehören.
			i	23 14 3	8		1,5	
			L	23 45 3				
			M	23 52 40	20	5	4	
	11. Okt.		*F*(?)	0 15 —				
36.	11. Okt.	*IIu*	*P*	15 50 7	< 1			
			i	15 51 21	8		4	
			S	16 0 11	10	4	4	
				16 16 50	24		15	
			L	16 29 20	40			
			M	16 31 50	30	60	70	
			M	16 39 —	24		90	
			M	16 44 35	20		45	
			C		18—12			
			F	19 — —				
37.	15. Okt.			22 4 —				Namentlich auf *OW* flache regelmäßige Wellen überlagert von Pulsationen. Seismische Natur nicht ganz sicher, da eine Stunde vorher starke Windstörungen von beiden Komponenten verzeichnet und bei *NS* auch zur angegebenen Zeit unregelmäßige Wellen registriert sind.
				22 8 —	25			
			F	23 21 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
38.	16. Okt.	*IIIu*	*S*	15 20 37				Wegen ungewöhnlich starker Tagesstörungen ist *P* nicht zu erkennen, ebenso ist der Anfang der Hauptphase wegen übergelagerter kurzer Wellen unsicher.
			Le (?)	15 34 29				
			M	15 39 46	35	280		
			M	15 42 6	26	190		In *Plauen* ohne deutliche Vorphasen mit allmählich auftauchender Hauptphase registriert. In letzterer erreichen die Wellen anfänglich 30—40 sek. Periode, 10 Minuten später folgen wie in Leipzig eine Reihe Maxima, innerhalb deren die Perioden von 25 sek. allmählich auf 20 sek. abnehmen.
			M	15 45 39	20	160	76	
			M	15 49 19	20	200		
			M	15 50 —	20		200	
			M	15 51 10	20	190	300	
			M	15 52 3	20	180	240	
			M	15 55 3	20		170	
			M	15 56 5	20		150	
			M	15 58 3	20		114	
			C		18—15			
			F	17 30 —				
39.	17. Okt.	*Iu*	*L*	13 3 —	20	2	3	Flache lange Wellen werden unter den Pulsationen sichtbar.
			F	13 22 —				
40.	21. Okt.	*IIIr*	*Pi*	5 31 28				Zerstörendes Beben in Turkestan (siehe Taf. I. Fig. 2a und 2b und Tafelerklärung S. 76.)
					1,25	2	2	
			i	5 31 35	8	9,5	45	In *Plauen* ganz ähnlich wie in Leipzig, nur entsprechend schwächer aufgezeichnet. Auch die dortige Registrierung weist zwei Hauptphasen, entsprechend den beiden durch einen Zeitabstand von 20 Minuten von einander getrennten Stößen auf und ist infolgedessen von viel längerer Dauer als die des gleich starken Bebens vom 22. Dezember 1906 (vgl. diese Berichte 1907, S. 27.)
			i	5 33 9	9	45	105	
			i	5 35 13	8		18	
			Si	5 37 23	9		17	
			i	5 37 55	10		70	
			L	5 44 9				
			M	5 45 13	11	240	170	
			M	5 46 46	9	200	130	

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
40.	21. Okt.	*IIIr*	*M*	5 48 37	19	1500	1300	
			M	5 51 50	18		1040	
			M	5 52 57	12	260	240	
			M	5 55 30	13	280		
41.	21. Okt.	*IIIr*	*P*	5 52 9				Die Vorläufer dieses Stoßes ordnen sich den schwächer werdenden Hauptphasenwellen des vorigen über.
			M	6 10 45	19		775	
			M	6 12 11	10		220	
			M	6 14 26	9		130	
			C		15—8			
			F	8 — —				
42.	23. Okt.	*IIr*	P_{NS}	21 31 18				Zerstörendes Beben in Calabrien (siehe Taf. 1 Fig. 3[a] und 3[b] und Tafelerklärung S. 77). In *Plauen* sehr schwach registriert. *P* ist nicht erkennbar, in *L* heben sich zwei Wellen mit 10 sek. Periode aus einer Reihe schwächerer (8 sek. Periode) deutlich hervor.
			P_{OW}	21 31 26				
					1,3	4		
			S	21 33 51	6		1,5	
			L	21 35 31				
			M	21 36 10	6	13	15	
			M	21 37 20	11	37	13	
			M	21 38 27	9	13	8,5	
			C		9—6			
			F	22 — —				
43.	27. Okt.	*IIr*	*Pi*	6 23 46	<1			Die langen Wellen der Hauptphase werden noch geraume Zeit von kürzeren überlagert. In *Plauen* mit sehr schwachen, mit bloßem Auge nur eben sichtbaren Wellen registriert, dieselben sind anfänglich unregelmäßig, dann werden sie sehr gleichmäßig und haben 15 sek. lange Perioden.
			i	6 25 16				
				6 25 25	8		6	
			S	6 30 3				
			i	6 33 3	9		1,5	
			L	6 37 23	11			

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
43.	27. Okt.	*IIr*	*M*	6 40 57	17	62	40	
			C		10—6			
			F	7 40 —				
44.	2. Nov.	*I*	*L*	23 35 —				Aus den Pulsationen tauchen längere Wellen auf.
			M	23 37 —	15	8		
			F	24 — —				
45.	3. Nov.	*Iu*	*i*	21 12 37				Von 21 h 12 m an hin und wieder flache seismische Wellen, *L* taucht ganz langsam auf. Bei *NS* ist die Aufzeichnung durch Wind gestört.
			Le	22 1 —				
			M	22 2 50	ca. 24		6	
			F	22 32 —				
46.	16. Nov.	*Iu*	*Le*	16 13 30				Durch Pulsationen stark beeinträchtigte flache Aufzeichnung.
			M	16 18 30	ca. 20	2	4	
			F	16 27 —				
47.	16. Nov.	*Iu*	*Le*	23 54 30	30			Von Vorläufern ist wegen der Pulsationen nichts zu erkennen.
			M	23 57 30	20	20	20	
	17. Nov.		*M*	0 4 30	15		5	
			F	0 30 —				
48.	21. Nov.	*Iu*	*P*	21 15 46				Bei *OW* werden die seismischen Wellen durch Pulsationen stark beeinträchtigt.
			S	21 25 41	7,5		2,5	
			Le	21 41 26				
			M	21 45 20	30	13		
			M	21 52 50	22	30		
			C		15—12			
			F	23 — —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (MEZ) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
49.	24. Nov.	*Iu*	*S*	15 23 42				Von *P* ist nichts zu erkennen, *L* macht sich ganz langsam, mit sehr flachen Wellen bemerklich.
			Le	15 45 52				
			M	15 48 10	30			
			M	15 49 10	20	25	6	
			C		12—10			
			F	16 21 —				
50.	25. Nov.	*Iv* (?)		22 33 26	< 1		< 1	*NS* hat nicht geschrieben, bei *OW* lagern sich während der angegebenen Zeit kurze leichte Wellen über die Pulsationen, wegen deren sonst nichts zu erkennen ist.
			F	22 36 —				
51.	29. Nov.	*Ir*		4 31 10	< 1			*NS* hat sehr schwach gezeichnet, *P* besteht hier nur aus ganz kurzen leichten Schwingungen, auch die Hauptphase ist viel flacher als bei *OW*.
					4	0,3	2	
			S	4 35 5	7			
			Le	4 39 35				
			M	4 40 —	24		7,5	
			M	4 41 —	18		15	
			C		10—8			
			F	5 10 —				
52.	2. Dez.	*Iu*		15 36 —				Der Anfang des Seismogramms ist während des Papierwechsels und der bei dieser Gelegenheit vorgenommenen Nullpunktregulierung verloren gegangen. Es sind nur hier und da flache Wellen sichtbar, die stärksten $15^h\ 45^m$ — $15^h\ 49^m$.
			M	15 45 —				
			F	16 — —				
53.	15. Dez.	*IIu*	*i*	18 52 36	5		1	Von *P* ist nichts zu sehen. Nach dem angegebenen Einsatz *i* unregelmäßige, allmählich länger werdende Wellen, die bei *OW* $19^h\ 10^m$ bis 24 sek. Periode erreichen. Die Hauptphase entwickelt sich allmählich.
			Le	19 26 48	ca. 40			
			M	19 33 20	20	25	35	
			M	19 37 33	21	74	65	
			C		20—15			Besonders deutlich auf *OW* erscheinen von $20^h\ 46^m$ — $20^h\ 51^m$ und dann wieder von $20^h\ 59^m$ — $21^h\ 10^m$ Züge langer flacher Wellen mit 20—18 sek. Periode, von denen es dahingestellt bleibt, ob sie ein neues Fernbeben wiedergeben oder noch zu No. 53 gehören, von dem sie durch eine längere Ruhepause getrennt sind.
			F	20 30 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*M E Z*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
54.	19. **Dez.**	*Id*	*i*	**0 36 32**				Ohne irgend welche erkennbare Vorphase schlägt die *OW*-Komponente plötzlich 1,5, die *NS*-Komponente 0,75 mm weit aus, es folgen rasch schwächer werdende, nicht einzeln auflösbare Schwingungen, bereits nach 8 Sekunden tritt wieder Ruhe ein. Dieser augenscheinlich örtliche Stoß ist von niemand wahrgenommen worden.
			F	0 36 40				
55.	23. **Dez.**	*Iu*	*P*	? **2 21 29**	1			Der scharfe Einsatz von *S* ist nur bei *OW* vorhanden, pulsatorische Bewegungen lagern sich den seismischen Wellen über.
			Si	2 31 8	8		7,5	
			Le	2 48 45				
					30			Die Zeitangaben bei diesem und dem folgenden Beben sind nicht korrekt, der Uhrvergleich ergab eine so auffallend große Differenz, daß offenbar im Gang der Seismometeruhr eine Störung vorgekommen ist.
			M	2 56 55	20	11	5	
			F	3 20 —				
56.	25. **Dez.**	*I*		? **23 41 35**	< 1			Eine sehr eigentümliche Bebenaufzeichnung. Bei *NS* sind in den Vorläufern die Einsätze kaum wahrzunehmen, dagegen sind dieselben bei *OW* recht deutlich. Eine Hauptphase läßt sich nicht abgrenzen, es ist dafür eine lange Reihe von Wellen aufgezeichnet, deren Perioden sich fortwährend ändern.
					4		3	
			i	23 42 52	3		2	
			i	23 43 25	3			
			i	23 44 37	8		5	
			i	33 51 18	8	1,5		
				23 52 50	7	2		
	26. Dez.		*F*	0 25 —				
57.	30. **Dez.**	*IIIu*	*P*	**6 39 28**	< 1			In *Plauen* ohne deutliche Vorphasen im Hauptbeben mit Wellen von 24 sek. Periode und in den Nachläufern mit solchen von 15 sek. Periode aufgezeichnet
			Si	6 49 53	12	13	21	
			i	6 55 13	30		160	
			Le	7 7 8				
			M	7 9 40	30	215	230	
			M	7 16 40	19	120	138	
			M	7 24 40	16	50	56	
			C		18—12			
			F	8 40 —				

Tabelle II.

Die in Leipzig vom 1. Juli bis 31. Dezember 1907 aufgezeichneten pulsatorischen Bewegungen.

Juli		August		September		Oktober		November		Dezember	
T sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ
6	< 1	6–8	< 1			6–8	< 1	o. 5–7	o. < 1	5–6	< 1
6. 8,5	< 1	6–8	< 1	5–8	< 1	6–8	< 1–1	o. 5–7	o. < 1	5–6	< 1–1
6–8	< 1	5–8	< 1	5–8	< 1	6–7	< 1–1	o. 5–6	o. < 1	7–8	1–2
6. 8	< 1	5–8	< 1	6	< 1	6–8	< 1	o. 5–6	o. < 1	7–8	1
6. 8	< 1			5–6	< 1	5–6	< 1	o. 5. 10	o. < 1	5–8	< 1
6–10	< 1	5–8	< 1	5–8	< 1	o. 6–8	o. < 1	o. 5. 10	o. < 1	5–6	< 1–1
4,5–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–6	o. < 1	6–8	< 1	o. 5–10	o. < 1	5–8	< 1
6–8	< 1	5–6	< 1	o. 5–6	o. < 1	o. 6–8	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	7–8	2–3
5,5–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–6	o. < 1	6–8	< 1–1	o. 5–6	o. < 1	7–8	< 1–3
6–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–6	o. < 1	6–8	< 1	o. 5–7	o. < 1	o. 6–7	o. < 1
6–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–8	o. < 1	o. 6–8	o. < 1	o. 5. 10	o. < 1	o. 6–8	o. < 1
6–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–8	o. < 1	o. 6–8	o. < 1	5. 8	< 1–1	o. 6–10	o. < 1
6–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–8	o. < 1	o. 6–8	o. < 1	5–6	< 1–1	o. 6–8	o. < 1
5–8	< 1	6–8	< 1	6–7	< 1	o. 6–8	o. < 1	5–7	< 1–1	o. 6–7	o. < 1
5,5–7	< 1	5–8	< 1	5–6	< 1	6–8	< 1	5–7	< 1	o. 6–10	o. < 1
6–8	< 1	6–8	< 1	6	1–1,5	5–8	< 1–1	5–7	< 1	o. 5–10	o. < 1
5–8	< 1			5–6	< 1	5–7	< 1–1	5–7	< 1	6–8	< 1–1
6–8	< 1	6–8	< 1	o. 5–6	o. < 1	5–7	< 1–1	5–7	< 1	6–8	< 1–1
6–8	< 1	6–8	< 1	o. 5–8	< 1	o. 6	o. < 1	5–6	1–1,5	7–8	1–1,5
5–6	< 1	6–8	< 1	5–8	< 1–1	o. 6–8	o. < 1	6–8	1–2	6–8	1–1,5
				5–6	< 1	o. 6–8	o. < 1	5–7	1–1,5	6–7	1–2
6. 12	< 1	6–8	< 1	5–6	< 1	o. 6–8	o. < 1	6–7	1–1,5	6–7	1–2
6	< 1	o. 6	o. < 1	o. 5–6	o. < 1	o. 6–8	o. < 1	6–7	< 1–1	6–7	1–2
6. 10	< 1	o. 5–8	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	o. 6–7	o. < 1	5–7	< 1	6–7	< 1–1
6. 10	< 1	o	o	o. 5–10	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	o. 5–8	o. < 1–1,5	o	o
6. 10	< 1	o. 5–8	o. < 1	o. 5–10	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	5–9	< 1–1	6–7	1–2
6. 8	< 1	5–8	< 1	o. 5–10	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	5–8	< 1–1	6–7	1–2
5. 7	< 1	5–8	< 1	o. 6–8	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	5–8	< 1–1	6	1–1,5
6–8	< 1	5–8	< 1	o. 5–10	o. < 1	o. 5–8	o. < 1	5–6	< 1	5–6	< 1–1
5–8	< 1	5–8	< 1	6–8	< 1	o. 5–6	o. < 1	5–6	< 1	o. 5–8	o. < 1
6–8	< 1	o. 5–6	< 1			o. 5–7	o. < 1			o. 6	o. < 1

Tafelerklärung.

Die Figuren der Tafel wurden, wie in den früheren Berichten, erhalten, indem direkt von den betreffenden Registrierstreifen photographische Abzüge genommen, die seismischen Linien mit der Feder nachgezogen, alles übrige abgewaschen und die so gewonnenen Bilder photographisch auf den Stein übertragen wurden.

Die Zeitangaben sind an auf mitteleuropäische Zeit korrigierten Minutenmarkierungen eingetragen worden.

P bedeutet, wie in den vorstehenden Tabellen, die ersten Vorläufer,

S die zweiten Vorläufer,

L das Hauptbeben.

Die gemessenen Wellen (vgl. die Tabellen) sind durch kleine Kreuze (× ×) kenntlich gemacht worden.

Fig. 1. Leipziger Seismogramme des Erdstoßes von Ljubinje (Herzegovina) vom 1. August 1907. Vorläufer, Hauptphase und Anfang der Nachläufer. 1[a] Aufzeichnung der Nordsüdkomponente, 1[b] der Ostwestkomponente. Von den ersten Vorläufern ist nur bei der NS.-Komponente eine schwache Spur zu erkennen, die zweiten Vorläufer setzen scharf mit kurzen, etwas kräftigeren Schwingungen ein und gehen nach einer Minute in die Hauptphase über, welche nach 0,75 Minuten ein recht kräftiges Maximum und weiterhin mehrere, wesentlich schwächere aufweist. In den Nachläufern machen sich bald die kurzen, durch einen vorüberfahrenden Wagen verursachten Schwingungen störend bemerklich (vgl. Tabelle I, No. 15. S. 64).

Das Epizentrum dieses Bebens, dessen Seismogramme wegen ihres Vergleichs mit denen des calabrischen vom 23. Oktober 1907 reproduziert worden sind (siehe unten), ist 1000 km von Leipzig entfernt.

Fig. 2. Leipziger Seismogramme der Erdstöße in Turkestan am 21. Oktober 1907. 2[a] Aufzeichnung der Nordsüdkomponente, 2[b] der Ostwestkomponente. Die Seismogramme beginnen mit sehr kräftigen Ausschlägen, denen kurze Schwingungen übergeordnet sind. In den Vorläufern sind mehrere kräftige Einsätze vorhanden, die Hauptphase ist von den Vorläufern nicht scharf abgehoben und besteht aus Gruppen von allmählich schwächer werdenden Wellen. Letztere besitzen noch beträchtliche Energie, da ordnen sich ihnen die raschen Vorläufer eines weiteren Erdstoßes über, dessen Wellen

die ausklingenden des ersten Bebens stören. Den ersten sich bemerkbar machenden Vorläufern dieses zweiten Stoßes folgen nach 18 Minuten deutlich hervortretende Maxima. Wenn die letzteren annähernd dem Beginn der Hauptphase entsprechen, dürfte der zweite Stoß in etwas größerer Entfernung stattgefunden haben als der erste, bei dem die Hauptphase nur 13 Minuten nach den Vorläufern erschien. Jedenfalls spricht aber die Gleichartigkeit der Aufzeichnung beider Stöße dafür, daß dieselben, wenn auch vielleicht nicht demselben Herd, so doch der gleichen Herdlinie angehören (vgl. Tabelle I, No. 40 und 41, S. 70).

Das epizentrale Gebiet dieser kräftigen Erdstöße befindet sich in Turkestan, wo dieselben an vielen Orten gefühlt wurden, in Karadag aber bedeutende Bergstürze verursacht haben, durch die viele Tausende von Menschen umgekommen sein sollen. Die Stöße gehören also jenem großartigen Schüttergebiet an, in dem am 22. August 1902 Kaschgar, am 16. Dezember desselben Jahres Andischan vernichtet wurden, in dem ferner außer vielen schwächeren das gewaltige Erdbeben vom 22. Dezember 1906 stattgefunden hat und in dessen östlicher Fortsetzung in der mongolischen Wüste die Gebiete liegen, in denen am 9. und 23. Juli 1905 die stärksten bis jetzt überhaupt in Leipzig registrierten Erdbeben sich abgespielt haben (diese Berichte 1906, S. 93—96). Bei allen diesen Beben dürfte es sich um Abbrüche handeln, welche in den von Westen nach Osten, also fast in der Richtung des Himalaya verlaufenden Kettengebirgen Zentralasiens, fern von allen bekannten Vulkanen vor sich gehen. Bemerkenswert für diese nach alledem rein tektonischen Erschütterungen ist es, daß nun schon zum dritten Male durch eine solche eine weitere ausgelöst worden ist. Es folgte nämlich am 22. August 1902 auf den ersten heftigen Stoß in Kaschgar nach 67 Minuten ein zweiter. Ferner vollendete am 16. Dezember desselben Jahres ein nach 57 Minuten dem ersten folgendes Beben die Verwüstung von Andischan und am vergangenen 21. Oktober endlich löste die erste Erschütterung bereits nach 21 Minuten eine zweite aus.

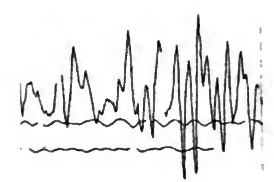
Fig. 3. Leipziger Seismogramme des Calabrischen Bebens vom 23. Oktober 1907. 3^a Aufzeichnung der Nordsüdkomponente, 3^b der Ostwestkomponente. Die Seismogramme bestehen aus deutlichen, raschen Vorläufern, denen nach 4 Minuten eine verhältnismäßig sehr schwache Hauptphase folgt (vgl. Tabelle I, No. 42, S. 71).

Nach einem Berichte der französischen Wochenschrift „Illustration" hat dieses neueste calabrische Beben von derselben Stelle seinen Ausgang genommen wie das furchtbare vom 8. September 1905, hat sich auch in gleicher Weise über Catanzaro, Monteleone, Pizzo, Tropea und Reggio ausgebreitet und besonders schwer Brancaleone, Bruzzano, vor allem aber Ferruzzano betroffen. Bei dieser Gleichartigkeit beider Beben und bei der den Beschreibungen nach auch gleichen Schütterstärke beider im Epizentralgebiet fällt es sehr auf, wie geradezu dürftig die hiesigen Seismogramme vom 23. Oktober 1907 gegenüber denen vom 8. September 1905 (vgl. diese Berichte 1906, Tafel I und S. 58) sind. Maßen von fast 1000 μ in der Hauptphase von 1905 stehen solche von nur 37 μ in der vom vergangenen Jahr gegenüber. Der Vergleich der Seismogramme der calabrischen Erdbebenkatastrophe mit denen des schadlos verlaufenen Stoßes von Ljubinje (siehe oben) zeigt, daß die Hauptphasen beider in Leipzig fast genau die gleiche Intensität besessen haben.

Erdbebenstation des paläontologisch-geologischen Institutes Leipzig.

13. Januar 1908.

Druckfertig erklärt 4. III. 1908.



21s
m21s
8

INHALT.

Seite

K. Rohn, Ein allgemeiner Satz über doppelt berührende Kegelschnitte, von dem der Steinersche Satz über doppelt berührende Kreise ein Spezialfall ist 2

Gerhard Kowalewski, Umkehrung einer Transformation und implizite Funktionen 10

K. Żorawski, Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades. (Zweite Mitteilung) 20

C. Neumann, Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. Zweite Abhandlung 53

Franz Etzold, Neunter Bericht der Erdbebenstation Leipzig. Mit einer Tafel 57

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

MIT EINER TAFEL.

II.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1908.

Einzelpreis 2 Mark.

SITZUNG VOM 24. FEBRUAR 1908.

Herr KRAUSE trägt vor: „Über Gelenksysteme".

Herr NEUMANN übergibt für die Berichte eine Abhandlung über: „Einige Äußerungen C. G. J. JACOBIS über die Prinzipien der analytischen Mechanik".

Herr FLECHSIG trägt vor: „Über die Reihenfolge, in der sich die Leitungsbahnen im Gehirn entwickeln".

Herr GARTEN übergibt für die Berichte eine Abhandlung: „Der durch den konstanten Strom im Nerven des Kaltfrosches ausgelöste Erregungsvorgang ist diskontinuierlicher Natur".

Die Klasse bewilligt zur Unterstützung der luftelektrischen Forschungen einen einmaligen Beitrag von 1100 Mark.

Geschäftliche Mitteilungen.

Einige Äußerungen C. G. J. Jacobis über die Prinzipien der analytischen Mechanik.

Zusammengestellt von[1])
C. Neumann.

§ 1.

Über die allgemeine Formel von Lagrange und deren Entstehung aus dem Satz der virtuellen Verrückungen und aus dem d'Alembertschen Satz.

Der Satz der virtuellen Verrückungen und der d'Alembertsche Satz repräsentieren diejenigen beiden Stützpunkte, von denen aus Lagrange zu seiner allgemeinen Formel gelangte:

$$(L.)\quad \sum\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right]=0.$$

Diese Behauptung entspricht vollständig den von Lagrange selber gemachten Angaben. [Vgl. die „Analytische Mechanik von Herrn Lagrange", übersetzt von F. W. A. Murhard, Göttingen, 1797, daselbst S. 186. Ferner vergleiche man die von Bertrand redigierte dritte Edition der „Mécanique analytique", Paris, 1853, tome 1, pag. 223, 224.]

Es ist daher nicht ganz richtig, die allgemeine Formel (L.) geradezu als den d'Alembertschen Satz zu bezeichnen.

Der d'Alembertsche Satz ist keineswegs mit jener Formel (L.) identisch. Vielmehr ist derselbe nach Lagrange [l. c. tome 1, pag. 223] folgendermaßen auszusprechen: *„Si l'on imprime à plusieurs corps des mouvements qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, il est clair qu'on peut regarder ces mouvements comme composés de ceux que les corps prendront réellement, et d'autres mouve-*

---

1) Schon früher, im Jahre 1869, ist vom Verfasser auf einige der hier zusammengestellten Jacobischen Urteile hingewiesen worden. Vgl. diese Berichte, 1869, Seite 257 (Note).

ments qui sont détruits; d'où il suit que ces derniers doivent être tels, que les corps animés de ces seuls mouvements se fassent équilibre."

Dieses d'ALEMBERTsche Prinzip — so führt LAGRANGE fort — liefere nicht unmittelbar die für die Lösung des dynamischen Problems erforderlichen Gleichungen, gestatte aber, dieselben abzuleiten aus den Gleichgewichtsbedingungen. Kombiniere man z. B. dieses d'ALEMBERTsche Prinzip mit den gewöhnlichen Prinzipien des Gleichgewichts des Hebels oder der Zusammensetzung der Kräfte, so könne man in solcher Weise sofort hingelangen zu den Gleichungen der zu untersuchenden Bewegung; — — —, und ebenso könne man schließlich die *allgemeine Formel* der Dynamik [d. i. die obige Formel (L.)] dadurch erhalten, daß man das d'ALEMBERTsche Prinzip kombiniere mit der allgemeinen Formel der Statik [d. i. mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen], [l. c. tome 1, pag. 223—225].

Es war vielleicht nur ein kleiner Schritt erforderlich, um von dem Satz der virtuellen Verrückungen und vom d'ALEMBERTschen Satze aus zu jener *allgemeinen Formel* (L.) zu gelangen. Aber dieser Schritt, so klein er auch war, ist nicht von d'ALEMBERT selber, sondern erst vierundzwanzig Jahre später von LAGRANGE getan worden. So entsteht häufig in den mathematischen Wissenschaften das Allerwichtigste aus scheinbar ganz kleinen Schritten.

§ 2.

Die betreffenden Äußerungen JACOBIS.

Die allgemeine LAGRANGEsche Formel (L.) ist identisch mit jener „symbolischen Formel", welche JACOBI, in einer in Königsberg gehaltenen Vorlesung, seinen Betrachtungen zugrunde legte. JACOBI bemerkt daselbst ausdrücklich, er wolle jene Formel nicht zu beweisen suchen; vielmehr wolle er dieselbe als „ein *Prinzip* ansehen, welches zu beweisen nicht nötig ist". JACOBI fügt hinzu: „dies sei die Ansicht vieler Mathematiker, namentlich auch die von GAUSS". [JACOBIS Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von CLEBSCH, 1866, daselbst Seite 15. Vgl. übrigens auch Seite 54, 55].

Viel eingehender, als in dieser von JACOBI zu *Königsberg* im Wintersemester 1842/43 gehaltenen Vorlesung, sind übrigens die allgemeine Formel (L.), sowie auch ihre beiden Stützpunkte, nämlich der Satz der virtuellen Verrückungen und der d'ALEMBERTsche Satz von JACOBI besprochen worden in einer von ihm im Winter-

semester 1847/48 in *Berlin* gehaltenen Vorlesung, die bis jetzt leider nicht gedruckt ist, deren Inhalt mir aber bekannt wurde durch ein Vorlesungsheft, welches von meinem Kollegen SCHEIBNER (einem damaligen Zuhörer JACOBIS) ausgearbeitet ist, und dessen Durchsicht mir gütigst gestattet war.

Während jene Königsberger Vorlesung fast ausschließlich nur die Darlegung und Vervollkommnung der in der Mechanik anzuwendenden *analytischen Methoden* zum Gegenstande hat, zeichnet sich die soeben genannte Berliner Vorlesung aus durch eine Kritik der *eigentlichen Fundamente* der Mechanik, wie sie schärfer wohl kaum gegeben werden kann.

§ 3.

Fortsetzung. Über den Satz der virtuellen Verrückungen.

Was den Satz der virtuellen Verrückungen anbelangt, so dürften gegen die bis jetzt versuchten Beweise (JACOBI spricht immer nur von den „*vermeintlichen*" Beweisen) der Hauptsache nach folgende Argumente geltend zu machen sein:

1. Handelt es sich um ein System materieller Punkte, welches in seiner Beweglichkeit beschränkt ist durch eine gegebene *Bedingungsgleichung*, so pflegt man den Satz der virtuellen Verrückungen in der Art zu beweisen, daß man zunächst diese Gleichung ersetzt durch eine geeignete *materielle Verbindung* der Punkte. Hinter diesem Verfahren aber verbirgt sich, wie JACOBI mit Recht hervorhebt, ein gewisser, nicht weiter zu beweisender Grundsatz, nämlich das Prinzip, daß eine solche materielle Verbindung — unbeschadet ihrer Wirksamkeit — ersetzt werden dürfe durch jede *andere* materielle Verbindung, falls nur beide auf *dieselbe* Gleichung führen. [So ungefähr drückt JACOBI sich aus in der von SCHEIBNER ausgearbeiteten Vorlesung.]

2. Wollte man, um ein derartiges Prinzip zu vermeiden, *geradezu* die gegebene Bedingungsgleichung zur Grundlage der Untersuchung machen, *ohne* sie zuvor durch eine passende materielle Verbindung der Punkte ersetzt zu haben, so würde man, wie JACOBI [in der von SCHEIBNER ausgearbeiteten Vorlesung] bemerkt, das mechanische Problem zu lösen ganz außer stande sein. — Soll z. B., um den einfachsten Fall ins Auge zu fassen, ein Punkt $m(x, y, z)$ gezwungen sein, einer gegebenen Gleichung $f(x, y, z) = 0$ zu gehorchen, und sind überdies irgendwelche auf den Punkt einwirkende Kräfte X, Y, Z, sowie auch sein Anfangszustand, gegeben, so zeigt

sich, daß diese Data nicht ausreichend sind, um, auf sie gestützt, den Ort des Punktes für einen gegebenen späteren Zeitaugenblick bestimmen zu können. Denn zur Ermittlung des gesuchten Ortes ist eigentlich nur *eine* Vorschrift vorhanden, d. i. die Gleichung $f(x, y, z) = 0$; die fernere Vorschrift, daß gegebene Kräfte X, Y, Z den Punkt sollizitieren sollen, gibt gar keinen weiteren Aufschluß weil sie etwas ganz Heterogenes besagt, — es sei denn, daß die Kräfte X, Y, Z schon von selber den Punkt so zu bewegen bestrebt sind, wie es jene Gleichung verlangt. Demgemäß ist [so ungefähr lauten JACOBIS Worte] die Aufgabe nicht lösbar, solange nicht irgend ein *Prinzip* adoptiert wird, nach welchem jene beiderlei Bewegungsvorschriften miteinander zu kombinieren sind.

§ 4.

Fortsetzung. Über den d'ALEMBERTschen Satz.

Was andererseits den d'ALEMBERTschen Satz anbelangt, so ist folgendes zu bemerken.

1. Wegen der in dem System vorhandenen Verbindungen können die einzelnen Massenpunkte des Systems den auf sie einwirkenden Kräften nicht unmittelbar Folge leisten. Um nun unter so bewandten Umständen die eintretende Bewegung zu ermitteln, pflege man — sagt JACOBI — *unwirksame* Kräfte, d. i. solche Kräfte hinzuzufügen, deren Wirkung durch die im System vorhandenen Verbindungen zerstört wird; und nach Hinzufügung derartiger Kräfte pflege man alsdann das System als ein System von Punkten anzusehen, deren jeder völlig *frei* beweglich ist. — Dieses Verfahren sei aber als ein „*Prinzip*" anzusehen. Aus diesem Prinzip ließen sich dann allerdings die in der Mechanik üblichen Formeln ableiten. — So ungefähr lauten JACOBIS Worte [in der CLEBSCHschen Edition, Seite 54, 55]; und wenn JACOBI in solchem Zusammenhang des Wortes „*Prinzip*" sich bedient, so soll das offenbar heißen, das in Rede stehende Verfahren sei, nach seiner Ansicht, ein in der Luft schwebendes, nicht weiter beweisbares, oder wenigstens nicht weiter bewiesenes.

2.[1]) Besonders schweren Bedenken dürften übrigens die An-

---

1) Dieser Teil 2. des gegenwärtigen Paragraphs ist vom Verfasser des vorliegenden Aufsatzes hinzugefügt. Übrigens darf nicht unterlassen werden, darauf aufmerksam zu machen, daß auch von JACOBI über diesen

wendung des Satzes der virtuellen Verrückungen, sowie auch die Anwendung des d'Alembertschen Satzes in solchen Fällen unterliegen, in denen das betrachtete materielle System irgendwelchen mit der *Zeit* behafteten Bedingungsgleichungen unterworfen ist. Es liegt klar zutage, daß die hier vorliegenden Schwierigkeiten und Unsicherheiten den Mathematiker in die peinlichste Verlegenheit bringen. Würde doch auch sonst ein so hervorragender Mathematiker wie Lindemann nicht so viel Zeit und Scharfsinn darauf verwendet haben, um mittelst neuer und sehr künstlicher Konstruktionen, kurz mittelst *neuer Hypothesen*, durch diese Schwierigkeiten hindurch sich einen Weg zu bahnen. [Vgl. Lindemanns Aufsatz in den Berichten der Münchener Ak. d. Wiss., 1904, Heft 1, Seite 88.]

§ 5.[1])

Sind die in den vorigen Paragraphen erwähnten Ungereimtheiten und Schwierigkeiten wirklich vorhanden?

Sie sind wirklich vorhanden, sobald man zwischen den Koordinaten der materiellen Punkte oder auch zwischen diesen und der Zeit ganz *beliebige* Bedingungsgleichungen sich auszudenken erlaubt, unbekümmert darum, ob diese Bedingungsgleichungen in der Natur wirklich vorkommen oder nicht.

Betrachtet man aber die analytische Mechanik als einen Teil der *Physik*, und beschränkt man sich demgemäß auf diejenigen Bedingungsgleichungen, die in der Natur wirklich anzutreffen sind, so dürfte man wohl alle Schwierigkeiten, welche diese Gleichungen mit sich bringen, dadurch zu vermeiden imstande sein, daß man diese Gleichungen durch diejenigen *Kräfte* ersetzt, durch welche sie hervorgebracht werden. — Dieser Weg zur Beseitigung der in Rede stehenden Schwierigkeiten ist keineswegs neu. Jedenfalls ist derselbe schon im Jahre 1866 von Delaunay [in seinem ausgezeichneten Werke: *Traité de Mécanique rationelle*, Paris, 1866] angedeutet, und, wenigstens in einzelnen Fällen, in völlig klarer Weise durchgeführt worden.

Punkt sehr beachtenswerte Äußerungen vorliegen [in der Clebschschen Edition auf Seite 56, 57]. Doch dürfte es zu weit führen, auf jene Jacobischen Bemerkungen hier näher eingehen zu wollen.

1) Dieser letzte Paragraph ist als ein Zusatz des Verfassers anzusehen.

Druckfertig erklärt 21. III. 1908.]

Der durch den konstanten Strom im Nerven des Kaltfrosches ausgelöste Erregungsvorgang ist diskontinuierlicher Natur.

Von

S. Garten.

Mit einer Tafel.

Seitdem durch Buchanan[1]) und den Verf.[2]) nachgewiesen worden war (1901), daß bei sehr verschiedenartigen Reizen, die den Muskel direkt oder indirekt in eine anhaltende Erregung versetzen, dieser den Reiz mit einer Reihe von rhythmischen Erregungsvorgängen beantwortet, lag es nahe anzunehmen, daß auch anderen protoplasmatischen Gebilden solche rhythmische Fähigkeiten innewohnen. Insbesondere erschien es von Interesse, festzustellen, ob in der als Leitungsorgan weitgehend differenzierten markhaltigen Nervenfaser Reste jener vielleicht allen lebendigen Protoplasten eigenen rhythmischen Fähigkeit vorhanden sind. In diesem Falle würde jene Fähigkeit, auf einen kontinuierlichen Reiz mit diskontinuierlichen Erregungen zu antworten, nur unter besonders günstigen Umständen hervortreten, nämlich nur dann, wenn ein kontinuierlicher Reiz wie der konstante Strom, nach Aussage des Erfolgsorganes eine sogenannte Dauererregung hervorbringt. Für den durch den konstanten Strom erzeugten Schließungstetanus war vom Verf. bereits nachgewiesen[2]), daß die Durchströmung einer Nervenstrecke mit dem konstanten Strom einen Erregungsvorgang auslöst, der im Muskel zu langen Reihen der typischen Muskelrhythmen von zirka 9σ[3]) Dauer Ver-

---

1) Buchanan, the electrical response of muscle in different kinds of persistent contraction. Journ. of Physiol. Vol. XXVII. N. 1 u. 2. 1901.

2) Garten, Über rhythmische elektrische Vorgänge im quergestreiften Skelettmuskel. Abh. d. kgl. Sächs. Ges. d. W., math.-phys. Kl. Bd. XXVI. 1901.

3) Nach Beobachtungen an Herbstfröschen bei Zimmertemperatur. Bei niederer Temperatur werden die einzelnen Perioden ganz außerordentlich verlängert.

anlassung gibt. Auch Buchanan hatte das analoge Verhalten des Muskels bei der Öffnungserregung nach Durchströmung eines Nervenstückes mit aufsteigendem Strom beobachtet.

Burdon-Sanderson[1]) teilte bereits im Handbuche von Schäfer eine Abbildung des Schließungstetanus (vom Nerven aus) mit, bei der in der Kapillarelektrometerkurve zum Beginn der dauernden negativen Schwankung des Muskels eine große Reihe von Wellen hervortrat, deren Dauer nach seiner Abbildung sich auf etwa 10σ berechnen ließ. Wie sich hierbei nun aber der Erregungsvorgang im Nerven selbst vollzieht, konnte bisher nicht festgestellt werden. Da der Muskel bei direkter Reizung sowohl mit dem konstanten Strom, als auch mit außerordentlich frequenten Induktionsströmen stets mit seinem eignen Rhythmus antwortet (vgl. Buchanan bzw. Garten), so war aus der elektrischen Reaktion des Muskels im Schließungstetanus vom Nerven aus über den im Nerven selbst sich abspielenden Erregungsvorgang nichts zu ermitteln Ebensowenig dürfte man aber auch berechtigt sein, aus den Beobachtungen Buchanans, daß die Rückenmark*zentren* des strychninisierten Frosches rhythmische Erregungen von einer Periode von $^1/_4$—$^1/_{12}$ Sekunde hervorbringen, den Schluß zu ziehen, daß auch den Achsenzylinderfortsätzen der zentralen Ganglienzellen die gleiche Fähigkeit innewohne.

Zuletzt hat Boruttau[2]) versucht, den Schließungs- und Öffnungs-(Ritterschen)Tetanus am Nerven mit Hülfe des Kapillarelektrometers zu verfolgen. Das Ergebnis seiner Versuche, das er auch durch zwei Abbildungen (Fig. 69 und 70) wiedergibt, sei mit seinen eignen Worten angeführt. „Rhythmische, oder auch nur unregelmäßige Schwankungen, welche den Charakter der Muskelkontraktion als „Tetanus“ motivierten, sind besonders deutlich hier nicht zu erkennen, indessen beweist dies wohl nichts gegen die jetzt allgemein angenommene, durch Engelmann, Biedermann u. a. begründete Erklärung des Öffnungstetanus, indem derselbe dadurch entstehen soll, daß der sekundäre Katelektrotonus an der vorherigen Anode die Erregbarkeit des Nerven derartig steigert, daß im Nerven beständig vorhandene, sonst aber unterhalb der Reizschwelle bleibende Vorgänge nunmehr für

1) Burdon-Sanderson, Textbook of Physiology, part. II. S. 425 u. 426. 1900. Herausgegeben von Schäfer.

2) Boruttau, Die Aktionsströme und die Theorie der Nervenleitung. Ausführliche Abhandlung. 1. Hälfte. Die Erscheinungen am Nerven, Pflügers Arch. Bd. 84. 1901.

die Erregung wirksam werden: von diesen „latenten Erregungsvorgängen" ist in der Tat nicht zu erwarten, daß sie in den verschiedenen Nervenfasern an gleichgelegenen Punkten entstehen und sich synchronisch fortpflanzen; somit wird das Kapillarelektrometer sie im einzelnen auch nicht nach außen anzeigen können, höchstens ihre Summe in Gestalt einer dauernden „tonischen" Schwankung. Alles hier Gesagte gilt auch für den Schließungstetanus." Übrigens läßt sich vielleicht aus der einen Figur Boruttaus Nr. 69 für den Anfang des Öffnungstetanus andeutungsweise eine Diskontinuität im Anstieg der negativen Schwankung herauslesen, vorausgesetzt, daß nicht Ungleichmäßigkeiten in der Bewegung der Schreibfläche im Spiele sind.

Erst durch das von Einthoven konstruierte Saitengalvanometer erschien die Möglichkeit eröffnet, die kleinen, im Schließungstetanus vielleicht vorhandenen Diskontinuitäten zu erkennen. Unter Benutzung des großen Elektromagnet-Saitengalvanometers, wie es von Edelmann geliefert wird, gelang es mir in der Tat, derartige Oszillationen festzustellen. Die Zahl der Beobachtungen ist zwar gering, da zur jetzigen Jahreszeit mir nur verhältnismäßig wenig kräftige, einen guten Schliessungstetanus liefernde Kaltfrösche zur Verfügung standen Immerhin halte ich die Haupttatsache auf Grund der unten zu beschreibenden Versuche für gesichert, daß nämlich *am Nerven des Kaltfrosches der Reiz des konstanten Stromes einen diskontinuierlichen Erregungsvorgang im Nerven erzeugt.* Alle weiteren Einzelheiten, inbesondere die Frage, ob auch beim Nerven des Warmfrosches unmittelbar nach der Schliessung vielleicht mehrere abortive Erregungswellen auftreten, lassen sich erst in einer günstigeren Jahreszeit sicher entscheiden.

Die Versuche wurden in der Weise angestellt, daß von Längs- und Querschnitt unter Einschaltung einer Kompensationsvorrichtung der Demarkationsstrom zur Saite des Galvanometers abgeleitet wurde. Die Saite war in der Regel so stark gespannt, daß sie bei Eichungsversuchen gerade noch aperiodisch in die neue Gleichgewichtslage überging. Infolge der Erwärmung des Galvanometers durch den den Elektromagneten umkreisenden Strom läßt sich erst nach längerer Stromschließung eine konstante Fadenspannung erzielen. Gewöhnlich habe ich mich darauf beschränkt, durch eine Eichungskurve (Einschaltung einer bestimmten E. K. in den Stromkreis) nach einem gelungenen Versuch die Einstellungsgeschwindigkeit der Saite zu bestimmen. Für die auf Tafel II Fig. 1—4 vorgenommenen Versuche erfolgte die Endeinstellung aperiodisch nach $^{4-5}/_{171}$ Sekunde. Wurde der Faden weitergespannt, so daß die Endeinstellung bspw. in $^{2}/_{171}$

Sekunden eintrat, so ging die Saite von dem Moment der Stromschließung ab in zirka $^1/_{171}$ Sekunde nicht unbeträchtlich über die Gleichgewichtslage heraus. Es gilt diese Angabe nur für den vorliegenden Fall, wo der Nerv, bzw. ein entsprechend großer Widerstand sich im Stromkreis befindet.

In Figur 1—4 ist ein Versuch an einem Nerven eines sehr guten Kaltfrosches wiedergegeben. Vor dem Versuch hatte der Nerv eine Stunde nach der Präparation in Ringerscher Lösung gelegen. Die am distalen Ende des Nerven befindliche Galvanometerstrecke betrug 6,5 mm, die Zwischenstrecke 25 mm, und die Reizstrecke 7,5 mm. Letztere war vom proximalen Querschnitt noch 18 mm entfernt. Es wurde diese Anordnung gewählt, um mit dem am Querschnitt vorhandenen Demarkationsstrom den Versuch nicht zu komplizieren. Die Schließung des die Reizstrecke in absteigender Richtung durchsetzenden konstanten Stromes wurde mit meinem elektromagnetischen Kontaktapparat bewerkstelligt.[1]) Mit Hülfe der Eichungskurven, die ohne jede Veränderung mit *demselben Kontakt* aufgenommen wurden, ließ sich zunächst nachweisen, daß Diskontinuitäten durch Federungen am Kontakt sicher nicht vorhanden waren, vgl. auch die Eichungskurve Fig. 6 auf Taf. II. Der Moment des Stromschlusses ist bei den Reizungen mit dem konstanten Strom dadurch markiert, daß die untere Linie *R* die dicht darüber verlaufende Linie *L* schneidet. Der Moment des Stromschlusses entspricht in Figur 1, 3, 5 und 6 dem Schnittpunkt der unteren Konturlinie von *R* mit der unteren Konturlinie von *L*. Zur Zeitmarkierung dienen die mit meiner Stimmfeder[2])

1) Garten, vgl. Anm. 2 auf S. 1.

2) Kürzlich hatte ich Gelegenheit zu entdecken, daß die von mir insbesondere zur Ordinatenschreibung und photographischen Registrierung benutzte Stimmfeder (Zungenpfeife) auch schon in älterer Zeit von Grunmach zur Registrierung auf berußtem Papier angewendet wurde. Vgl. Stirling, Outlines of practical Physiology 1895. S. 211. Diese auf Veranlassung von Kronecker ausgeführte Zeitregistrierung hat in neuerer Zeit wohl kaum mehr Verwendung gefunden, jedenfalls war mir und wohl auch manchem anderen diese Anwendung der Zungenpfeife unbekannt. Übrigens hebt Grunmach in seiner eigenen Veröffentlichung (Ein neues Polygraphion. Verh. der Berl. Physiol. Ges., Du Bois-Reymonds Archiv 1880. S. 439) hervor, daß sich der Ton trotz der Reibung auf berußtem Papier konstant hielt. Bei meiner Verwendungsart (photographische Registrierung) wird die Zuverlässigkeit der Zungenpfeife in Bezug auf die Tonhöhe nicht einmal auf eine so harte Probe gestellt.

geschriebenen Vertikallinien. Der Abstand einer jeden von der übernächsten beträgt $^1/_{171}$ Sekunde in allen Versuchen.

Kurve 1, Taf. II zeigt die negative Schwankung des Längsquerschnittsstromes bei einer Temperatur von + 3 Grad. Man erkennt deutlich, daß nach der ersten steilen Welle der von der Saite geschriebenen Kurve *S* noch zwei weitere Wellen im absteigenden Kurventeil folgen. Rechnet man als Intervall, in dem sich die Erregungen folgen, die Zeit vom Beginn der ersten bis zum Beginn der nächstfolgenden Welle (erneuter Anstieg der Kurve), so ergibt sich für die beiden ersten Perioden 2,7 und 4,0 „Doppelskalenteile" (zu je $^1/_{171}$ Sekunde). Rechnet man bei der dritten Kurve das Intervall bis zu dem entsprechenden Wendepunkt, so würde sich für die dritte Welle ungefähr 3,5 Skalenteile ergeben. Um diese, durch den konstanten Strom im vorliegenden Fall ausgelösten Erregungen auf Grund der elektrischen Erscheinungen mit einem einfachen Erregungsvorgang zu vergleichen, wurde in Figur 2 (8 Minuten nach dem ersten Versuch) am gleichen Nerven und bei der gleichen Temperatur eine einfache negative Schwankung aufgezeichnet, wie sie bei Reizung mit einem einzigen Öffnungsinduktionsschlag (Rollenabstand 14 cm) erhalten wurde. Der Reizmoment entspricht hier, ebenso wie in der unten zu besprechenden Kurve 4, dem ersten scharfen Knick der Linie *R*. Ein Vergleich der Kurven 1 und 2 zeigt, daß etwa $^2/_{171}$ Sekunde lang, abgesehen von den absoluten Größenwerten, der Kurvenlauf fast vollständig übereinstimmt. Während aber nun nach dem Induktionsschlag die Saite relativ schnell in ihre alte Ruhelage zurückkehrt, treten in Figur 1 die oben besprochenen Oszillationen auf, nach denen freilich auch hier nach zirka $^{20}/_{171}$ Sekunde die Saite ihre Ruhelage nahezu erreicht hat. Man würde demnach zu vermuten haben, daß es sich in Versuch 1 um einen sehr unvollständigen Schließungstetanus handelt. Der Nerv wurde nun innerhalb von 12 Minuten auf 14 Grad erwärmt, ohne an seiner Lagerung auf den Elektroden irgend eine Änderung vorzunehmen, und jetzt wurde wieder mit der gleichen elektromotorischen Kraft (1 Daniell, 10 Ohm in Nebenschließung) gereizt. In diesem Falle (Fig. 3), wo allerdings die Stromstärke im Nerven entsprechend der Abnahme des Leitungswiderstandes bei der höheren Temperatur eine größere war, zeigte der Nerv eine viel länger anhaltende Dauererregung. So ist in Figur 3 am Schluß die Saite noch 6 mm von der Ruhelage entfernt, und, wie direkte Beobachtung ergab, blieb sie in analogen Versuchen, wie es bei einem

echten Schließungstetanus auch nicht anders zu erwarten ist, während der ganzen Durchströmungszeit von der Gleichgewichtslage abgelenkt. Mißt man jetzt in der oben beschriebenen Weise die Länge der ersten drei, auch hier wieder deutlich sichtbaren Wellen, so finden sich, entsprechend der höheren Temperatur (Temperatursteigerung um 11 Grad), wesentlich kleinere Werte, nämlich: 1,4, 2,0, 2,0. Während sich bei Figur 1 2,7, 4,0, 3,5 Doppelskalenteile ergeben hatten. Die Verhältnisse der einzelnen Zeiten zueinander sind also nahezu die gleichen geblieben, nur wäre die Zeit als Ganzes auf etwa die Hälfte reduziert. Es würde diese Differenz der von Kanitz[1]) für Deutung biologischer Vorgänge herangezogenen „RGT-Regel" entsprechen, nach der bei einer 10gradigen Temperaturerhöhung die Reaktionsgeschwindigkeit verdoppelt bis verdreifacht wird. Zum Vergleich ist bei höherer Temperatur — leider war inzwischen die Temperatur bis auf 17 Grad gestiegen[2]) — eine negative Schwankung nach Reizung mit einem einzelnen Induktionsschlag aufgenommen worden, vgl. Figur 4. Da in Figur 1 und 3, wie wohl kaum zu zweifeln ist, die gleichen Oszillationen nur in anderen zeitlichen Intervallen entsprechend der Temperaturänderung auftreten, so muß man es als ausgeschlossen ansehen, daß Versuchsfehler, wie Eigenschwingungen der Saite oder gar ein Federn des elektromagnetischen Schließungskontaktes, in Betracht kommen. Letztere Möglichkeit war ja auch schon durch die Eichungskurve widerlegt (s. o.).

Von einem anderen Kaltfrosch stammt der Versuch 5. Der Nerv war hier $^1/_4$ Stunde nach der Präparation bis auf 5,25 Grad abgekühlt worden. Auch hier werden ähnliche Oszillationen erhalten, von denen die ersten drei 1,9, 3,4, 2,0 Doppelskalenteile betragen. Entsprechend der höheren Temperatur im Vergleich zu Versuch Figur 1 scheinen sich die hier an den Oszillationen kennt-

1) Aristides Kanitz, Biolog. Zentralbl., Bd. 27, S. 14—26, 1907, und Pflügers Arch., Bd. 118, 1907. Herr Dr. Dittler und Tichomiroff werden in einer demnächst erscheinenden Mitteilung über die Muskelrhythmen näher darauf eingehen, ob auch für diese die RGT-Regel gilt.

2) Die Angaben über die höheren Temperaturen sind nur ganz ungefähre. Um möglichst bald am gleichen Nerven nach der Abkühlung die negative Schwankung bei höherer Temperatur zu erhalten, war der Paraffinklotz, auf dem der Nerv und die Elektroden sich befanden, aus der Kühlkammer herausgehoben worden, und das Thermometer zeigte nur die Lufttemperatur direkt über der Paraffinplatte an.

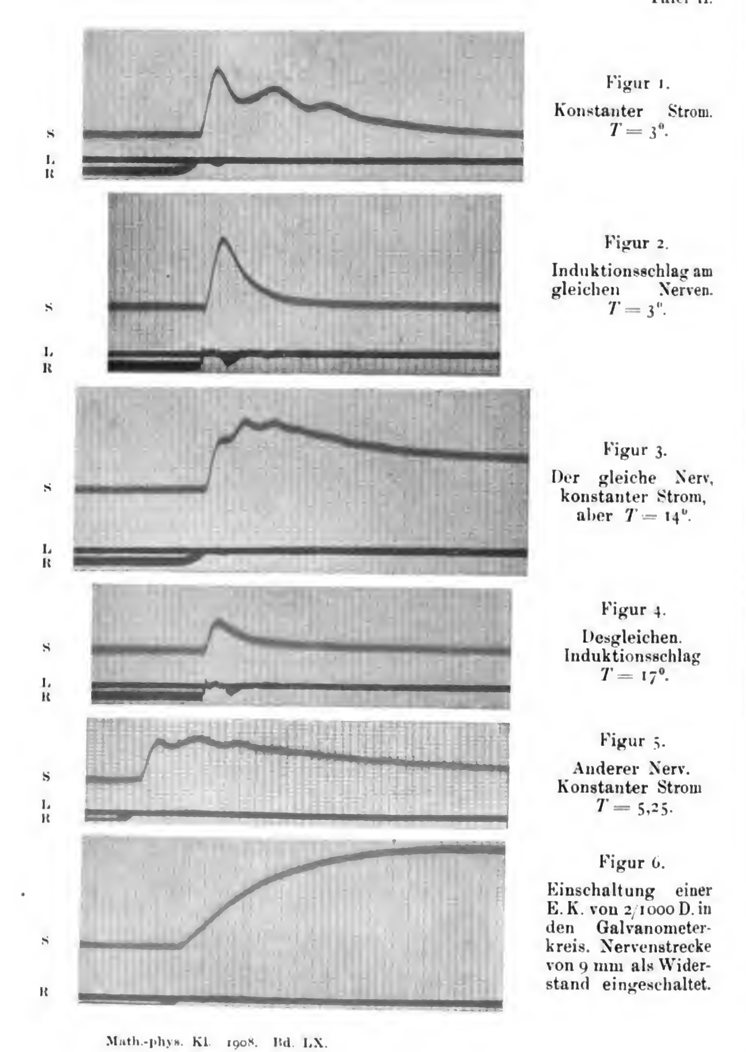
lichen Erregungsvorgänge in etwas kürzerem Intervall zu folgen als bei dem Versuch von Figur 1, wo ja die Temperatur nur 3 Grad betrug. Im vorliegenden Falle ist die Dauerablenkung ziemlich beständig und beträgt am Schluß der Kurve nahezu noch 4 mm. Die beistehende Eichungskurve 6 wurde hier, ohne auf die durch die Polarisation des Nerven bedingte Fehlerquelle Rücksicht zu nehmen, in der Weise gewonnen, daß die 9 mm lange Nervenstrecke, die bei Versuch 5 in den Galvanometerkreis eingeschaltet war, eingeschaltet blieb, und in den Stromkreis mit dem Kontaktapparat eine elektromotorische Kraft von $^2/_{1000}$ Daniell aufgenommen wurde. Bei der relativ langsamen Einstellung der in diesem Versuch nur schwach gespannten Saite wäre zu einer wirklichen Darstellung des Verlaufes des Aktionsstromes auf Grund der Figur 5 noch mehr als in den früheren Versuchrn eine Korrektion der Kurve notwendig, wie sie von Einthoven unlängst beschrieben wurde. Für die obige Frage: Ist der Erregungsvorgang im Schließungstetanus kontinuierlich oder diskontinuierlich, ist jedenfalls dieses mühsame Verfahren nicht erforderlich. Außer den beschriebenen Versuchen habe ich noch eine Reihe Experimente an anderen Eis- und Kellerfröschen und auch an Warmfröschen gemacht, erhielt aber nicht so deutliche Oszillationen wie in den angeführten Beispielen. In beistehender Tabelle seien die Fälle angeführt, bei denen ich Oszillationen erkennen konnte und die Länge der einzelnen Wellen abzuschätzen versuchte.

Aus den angeführten Beispielen geht hervor, daß unter den Bedingungen des Schließungstetanus im Anfang die von der Saite geschriebene Kurve Oszillationen darbietet, die auf einen diskontinuierlichen Erregungsvorgang im Nerven hinweisen. Mit Zunahme der Temperatur werden die einander folgenden Wellen kürzer, doch ist die Folge der einzelnen Erregungen nach dem bisher vorliegenden geringen Material keine streng rhythmische, d. h. die Perioden von Erregung zu Erregung haben verschiedene Werte. Daß nach kurzer Zeit die Oszillationen verschwinden und eine negative Dauerschwankung an ihre Stelle tritt, dürfte unter der Voraussetzung leicht zu verstehen sein, daß die Oszillationen in den einzelnen Nervenfasern eine verschiedene Periode besitzen, so daß die resultierende Saitenbewegung sehr bald einem Mittelwert zustrebt. Unter diesem Gesichtspunkte erscheint es nicht ausgeschlossen, daß auch die ersten Oszillationen nicht den jeweilig maximalen Erregungsvorgang aller, sondern nur einer Mehrzahl von Fasern entsprechen.

Zum Schluß möchte ich auf folgende Sätze meiner früheren

Plattennummer	Bezeichnung des Präparates	Temperatur	Stärke der Reizung	Dauer der Oszillationen in Doppelschwingungen[1])	Bemerkungen
8. II. 08. I.	Eisfrosch (Nervus ischiadicus)	5,25°	1 D 100 Ohm Nebenschl.	1,9 3,4 2,0	vgl. Fig. 5
II.	do.	4°	1 D 1000 Ohm Nebenschl.	2,0 4,0	
III.	do.	4°	do.	2,2 4,25	
19. II. 08. I.	do.	4°	1 D 10 Ohm Nebenschl.	3,5 4,0	
III.	do.	3°	1 D 1000 Ohm Nebenschl.	3,75 4,0	
XIV.	Kellerfrosch	6°	1 D 100 Ohm Nebenschl.	2,25 2,6	
XVI.	do.	4°	do.	2,5 4,5	
XVII.	Eisfrosch	3°	do.	2,7 1,25	
XVIII.	do.	5°	do.	2,2 1,0? 3,0	
XXII.	do.	3°	1 D 10 Ohm Nebenschl.	2,7 4,0 3,5?	vgl. Fig. 1
XXIV.	do.	14°	do.	1,4 2,0 2,0?	vgl. Fig. 3
XXVIII.	Warmfrosch	4°	do.	2,75 4,5	
XXIX.	do.	14°	do.	1,55 2,8?	
XXXI.	Eisfrosch	16,5°	do.	1,25 1,0 1,5?	
XXXII.	do.	17°	1 D 100 Ohm Nebenschl.	1,3 1,0	

1) 1 Doppelschwingung = $^1/_{171}$″.



Figur 1.
Konstanter Strom.
$T = 3^0$.

Figur 2.
Induktionsschlag am gleichen Nerven.
$T = 3^0$.

Figur 3.
Der gleiche Nerv, konstanter Strom, aber $T = 14^0$.

Figur 4.
Desgleichen. Induktionsschlag
$T = 17^0$.

Figur 5.
Anderer Nerv. Konstanter Strom
$T = 5{,}25$.

Figur 6.
Einschaltung einer E. K. von 2/1000 D. in den Galvanometerkreis. Nervenstrecke von 9 mm als Widerstand eingeschaltet.

Arbeit hinweisen: „Im Hinblick auf die nervösen Zentralorgane läßt Hermann für die Nerven die *Möglichkeit* offen, daß konstante Einwirkungen im Nerven diskontinuierliche Vorgänge auslösen könnten. Die Beobachtungen Engelmanns am Ureter und die zahlreichen Beobachtungen am Herzmuskel über die Einwirkung des konstanten Stromes, die Ergebnisse der Untersuchungen Herings und Biedermanns an der quergestreiften Skelettmuskulatur, wie auch die oben mitgeteilten Tatsachen" (Muskelrhythmen betreffend) „führen zu der Vermutung, daß *die Fähigkeit, auf den konstanten Strom mit rhythmischen Erregungen zu antworten, unter den reizbaren Gebilden viel weiter verbreitet ist, als man bisher angenommen hatte*". Nach den oben mitgeteilten Beobachtungen dürfte nun diese Vermutung auch auf den Nervenstamm auszudehnen sein. Auf weitere theoretische Erörterungen, die sich bei Betrachtung dieser obigen Ergebnisse aufdrängen, will ich erst eingehen, wenn ich an günstigerem Material im Spätherbst bzw. Winter weitere Beobachtungen angestellt habe.

Erklärung der Abbildungen auf Taf. II.

Sämtliche Figuren sind in $^2/_3$ der nat. Größe reproduziert.

Figur 1. Negative Schwankung des Längsquerschnittsstromes bei Schließung eines konstanten Stromes. Reizung mit 1 Daniell bei 10 Ohm Nebenschließung. Nervus Ischiadicus eines Kaltfrosches. Galvanometerstrecke 6,5, Zwischenstrecke 25, Reizstrecke 7,5 mm. T = 3°.

Figur 2. Wie in Figur 1, aber Reizung mit Induktionsschlag, Ra. 14 cm. T = 3°.

Figur 3. Wie in Figur 1, aber T = 14°.

Figur 4. Wie in Figur 1, aber Reizung mit Induktionsschlag, Ra. 14 cm. T = 17°.

Figur 5. Negative Schwankung des Längsquerschnittsstromes bei Schließung eines konstanten Stromes von 1 D bei 100 Ohm Nebenschließung. Nervus ischiadicus eines Kaltfrosches. Galvanometerstrecke 9, Zwischenstrecke 25, Reizstrecke 5 mm, Temperatur 5,25°.

Figur 6. Eichung durch Einschaltung einer EK von $^2/_{1000}$ D. In dem Kreis befand sich die Nervenstrecke von 9 mm des Versuchs Figur 5. Die Saite war relativ schwach gespannt.

Druckfertig erklärt 22. III. 1908.

Das Schließungsproblem von Poncelet und eine gewisse Erweiterung.

Von

Karl Rohn.

Poncelet behandelt in seinem Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822, 2. Ausg. 1865—66) das Problem der n-Ecke, die gleichzeitig einem Kegelschnitt k_0 eingeschrieben und einem andern Kegelschnitt k_1 umgeschrieben sind, und findet, daß es entweder unendlich viele oder kein einziges derartiges n-Eck gibt. Er ging dann weiter dazu über n-Ecke zu betrachten, deren Ecken auf einem Kegelschnitt k_0 liegen, während $(n - 1)$ seiner Seiten $(n - 1)$ Kegelschnitte $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ berühren, die mit k_0 einen Büschel bilden, und zeigte, daß dann auch die letzte Seite beständig einen Kegelschnitt k_n des Büschels berührt. Poncelet geht dabei von Kreisen eines Büschels aus und verallgemeinert alsdann das Resultat in projektivem Sinne. Besonders fand das erstere Problem von verschiedenen Mathematikern eine weitere Behandlung, und zwar wurde es zumeist mit Hilfe elliptischer Funktionen gelöst. Hierher gehört unter anderen die Arbeit von Rosanes und Pasch (J. f. Math. Bd. 64, p. 126—166), die in einer späteren Note (J. f. Math. Bd. 70, p. 169—173) zeigen, daß das Schließungsproblem mit einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft zusammenhängt; ferner Halphen, Traité des fonctions elliptiques (Paris 1888, Bd. 2, p. 370 ff.). Cayley (Phil. Trans. 1861, p. 225—239, und bereits früher Phil. Mag. 5 und 6) stellt die algebraische Bedingung für die Koeffizienten der Kegelschnitte k_0 und k_1 auf, damit solche k_0 eingeschriebene und k_1 umschriebene n-Ecke existieren. Ferner hat J. Thomae (Leipz. Ber. 47 (1895) p. 352—368) das allgemeinere Problem studiert, indem er die symmetrische zwei-zweideutige Verwandtschaft zu Grunde legt, wobei er nur von rein geometrischen Betrachtungen Gebrauch macht;

freilich wird der allgemeine Fall mittelst Kontinuitätsbetrachtungen erledigt. In den folgenden Untersuchungen bilden ebenfalls die symmetrischen zwei-zweideutigen Verwandtschaften und ihre Zusammensetzung den Ausgangspunkt. Insbesondere gelingt es, die Resultate in präziser geometrischer Form auszusprechen. Ferner wird gezeigt, daß man die Reihenfolge der Kegelschnitte, die von den aufeinanderfolgenden Seiten des n-Ecks berührt werden, beliebig abändern kann und daß dann immer noch geschlossene n-Ecke existieren, wenn es solche in der ursprünglichen Reihenfolge gibt. Dabei ist es möglich ganz bestimmt anzugeben, wie die n-Ecke miteinander zusammenhängen, die zu verschiedenen Reihenfolgen der Kegelschnitte $k_1, k_2, \ldots k_n$ gehören. Zum Schluß werden die algebraischen Relationen zwischen den Parametern der beiden Kegelschnitte behandelt, die einem n-Eck um- bez. einbeschrieben sind. Wegen der zahlreichen Literatur vergleiche man die Encyklopädie der math. Wiss. III. C 1, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme von FR. DINGELDEY p. 44—52.

1. Sind $f(xyz) = 0$ und $\varphi(uvw) = 0$ zwei beliebige Kegelschnitte, so bestimmen die Tangenten von φ auf dem Kegelschnitt f eine zwei-zweideutige symmetrische Verwandtschaft. Denn stellt man die Koordinaten der Punkte von f durch einen Parameter $\varkappa$ dar, etwa:

$$x = a_0\varkappa^2 + a_1\varkappa + a_2,$$
$$y = b_0\varkappa^2 + b_1\varkappa + b_2,$$
$$z = c_0\varkappa^2 + c_1\varkappa + c_2,$$

und gehören den Punkten $x_1y_1z_1$ bzw. $x_2y_2z_2$ die Parameter $\varkappa$ bzw. λ zu, so erhält man für die Koordinaten uvw ihrer Verbindungslinie:

$$\varrho u = (b_0c_1 - c_0b_1)\varkappa\lambda + (b_0c_2 - c_0b_2)(\varkappa + \lambda) + (b_1c_2 - c_1b_2) \text{ usf.}$$

Die Gleichung: $\varphi(uvw) = 0$ wird sonach sowohl in $\varkappa$ als in λ vom 2. Grade und ändert sich bei der Vertauschung von $\varkappa$ mit λ nicht. Umgekehrt stellen sich mit Hilfe der letzteren Gleichungen die Werte von $\varkappa\lambda$ und $(\varkappa + \lambda)$ als Quotienten linearer homogener Ausdrücke in uvw dar. Eine beliebige zwei-zweideutige symmetrische Beziehung zwischen $\varkappa$ und λ geht demnach, wenn man für $\varkappa\lambda$ und $(\varkappa + \lambda)$ ihre Werte einsetzt wieder in eine homogene Gleichung 2. Grades in uvw über.

Die Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes φ schneiden auf dem Kegelschnitt f entsprechende Punkte einer zwei-zweideutigen symmetrischen Verwandtschaft aus. Umgekehrt umhüllen die Verbindungs-

linien entsprechender Punkte einer zwei-zweideutigen symmetrischen Verwandtschaft auf dem Kegelschnitt f einen Kegelschnitt φ.

Wir bringen jetzt die zwei-zweideutige Verwandtschaft, die wir weiterhin stets als symmetrisch voraussetzen, auf eine möglichst einfache Form, und beziehen zu diesem Zweck die beiden Kegelschnitte f und φ auf ihr gemeinschaftliches Polardreieck. Demgemäß setzen wir:

$$\text{1a)} \qquad f \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$\text{1b)} \qquad \varphi \equiv \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0;$$

dabei nehmen wir beide Kegelschnitte als reell an und ebenso ihr gemeinsames Polardreieck. Ein reeller Punkt der Ebene besitzt bei dieser Darstellung freilich keine reellen Koordinaten; will man dieses jedoch erreichen, so braucht man nur etwa y durch iy und v durch $-iv$ zu ersetzen.[1])

Als Parameterdarstellung wählen wir:

$$\text{2a)} \qquad x = \varkappa^2 - 1, \quad y = i(\varkappa^2 + 1), \quad z = 2\varkappa;$$

dadurch ergeben sich:

$$\text{2b)} \qquad u = \varkappa\lambda - 1, \quad v = i(\varkappa\lambda + 1), \quad w = \varkappa + \lambda.$$

Weiter liefert $\varphi = 0$ auf dem Kegelschnitt f die zwei-zweideutige Verwandtschaft:

$$\text{3a)} \qquad \varkappa^2\lambda^2 + (\varkappa^2 + \lambda^2)\frac{ab}{c(b-a)} - 2\varkappa\lambda\frac{bc + ca - ab}{c(b-a)} + 1 = 0.$$

Ist umgekehrt die zwei-zweideutige Verwandtschaft auf f in der Form:

$$\text{3b)} \qquad \varkappa^2\lambda^2 - p(\varkappa^2 + \lambda^2) + 2q\varkappa\lambda + 1 = 0$$

gegeben, so ist die Gleichung 1b) durch die Gleichung:

$$\text{1c)} \qquad \varphi \equiv (q + p - 1)u^2 + (q + p + 1)v^2 + 2pw^2 = 0$$

zu ersetzen.

Man kann die zwei-zweideutige Verwandtschaft auf f auch noch mit Hilfe eines Kegelschnittes F:

$$\text{4)} \qquad F \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

definieren, indem man je zwei Punkte von f sich entsprechen läßt, die in bezug auf F konjugiert sind. Für zwei entsprechende Punkte

---

1) Der Fall wo f und φ zwei reelle Schnittpunkte besitzen, unterscheidet sich von dem stipulierten Falle nur dadurch, daß für reelle Punkte außer den Koordinaten auch die Parameter imaginär werden.

hat man dann einerseits die frühere Gleichung 3a) bzw. 3b) zwischen $\varkappa$ und λ, andererseits die Gleichung:

$$Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2=0=\varkappa^2\lambda^2+(\varkappa^2+\lambda^2)\frac{B+A}{B-A}-2\varkappa\lambda\frac{2C}{B-A}+1.$$

Hieraus bestimmen sich die Werte:

$$5\text{a)}\quad A:B:C=\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right),$$

$$5\text{b)}\qquad A:B:C=(p+1):(p-1):q.$$

Die Werte von A, B, C erhält man auch dadurch, daß man aus den Gleichungen:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=0,\qquad x_2^2+y_2^2+z_2^2=0,$$

$$\frac{(y_1z_2-z_1y_2)^2}{a}+\frac{(z_1x_2-x_1z_2)^2}{b}+\frac{(x_1y_2-y_1x_2)^2}{c}=0,$$

eine lineare Gleichung in den Koordinaten beider Punkte ableitet. Zunächst liefern die ersten Gleichungen:

$$y_1^2z_2^2-z_1^2y_2^2=z_1^2x_2^2-x_1^2z_2^2=x_1^2y_2^2-y_1^2x_2^2,$$

wodurch die dritte Gleichung übergeht in:

$$\frac{1}{a}\frac{y_1z_2-z_1y_2}{y_1z_2+z_1y_2}+\frac{1}{b}\frac{z_1x_2-x_1z_2}{z_1x_2+x_1z_2}+\frac{1}{c}\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_1y_2+y_1x_2}=0.$$

Die Multiplikation mit den Nennern liefert dann mit Rücksicht auf die ersten Gleichungen sofort:

$$\frac{1}{a}(-x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)+\frac{1}{b}(x_1x_2-y_1y_2+z_1z_2)$$
$$+\frac{1}{c}(x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2)=0.$$

Durch Vergleich mit: $Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2=0$ erhält man wieder die früheren Werte.

Je zwei entsprechende Punkte der auf dem Kegelschnitt f befindlichen zwei-zweideutigen Verwandtschaft 3a) *bzw.* 3b) *liegen auf einer Tangente des Kegelschnittes:*

$$\varphi\equiv\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=0,$$

$$\text{bzw.}\quad \varphi\equiv(q+p-1)u^2+(q+p+1)v^2+2pw^2=0;$$

zugleich sind sie konjugierte Punkte des Kegelschnittes:

$$4\text{a)}\quad \left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)x^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)y^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)z^2=0$$

$$\text{bzw. } 4\text{b)}\qquad (p+1)x^2+(p-1)y^2+qz^2=0$$

2. Im allgemeinen entsprechen einem Parameter $\varkappa$ der Verwandtschaft zwei verschiedene Parameter λ; es existieren jedoch vier Punkte auf f von der Art, daß ihnen nur je ein einziger, doppelt zählender Punkt entspricht. Die Parameter dieser vier Punkte auf f, die wir kurz als die vier Punkte S bezeichnen wollen, bestimmen sich durch das Verschwinden der Diskriminante von 3b), wenn wir 3b) als Gleichung 2. Grades für λ betrachten. Die Parameter der vier Punkte S sind also die Wurzeln der Gleichung:

$$6)\qquad \varkappa^4 - \varkappa^2 \frac{1 + p^2 - q^2}{p} + 1 = 0.$$

Diesen vier Punkten S entsprechen doppelt zählend vier Punkte T, deren Parameter sich als Wurzeln der Gleichung:

$$7)\qquad \lambda^4 + \frac{\lambda^2}{p}\left[1 + p^2 - \left(\frac{1 - p^2}{q}\right)^2\right] + 1 = 0$$

ergeben.

Die vier Punkte S sind nichts anderes als die Schnittpunkte der Kegelschnitte f und φ. Zieht man in diesen Punkten S die zugehörigen Tangenten an φ, so schneiden sie auf f eben die vier Punkte T aus. Die Koordinaten der vier Punkte S genügen den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{und} \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

dieselben sind also:

$$6\text{a})\qquad \sqrt{b - c} : \sqrt{c - a} : \sqrt{a - b}.$$

Die Tangente von φ in diesem Punkt ist:

$$ax\sqrt{b - c} + by\sqrt{c - a} + cz\sqrt{a - b} = 0;$$

daraus ergeben sich die Koordinaten der vier Punkte T als:

$$7\text{a})\qquad A\sqrt{b - c} : B\sqrt{c - a} : C\sqrt{a - b},$$

wo A, B, C die in 5a) gegebenen Werte besitzen.

Außer den Punkten S und T betrachten wir noch die vier Punkte R des Kegelschnittes f, deren Tangenten zugleich den Kegelschnitt φ berühren. Diese Punkte haben ersichtlich die Eigenschaft, daß sie bei der zwei-zweideutigen Verwandtschaft auf f sich selbst entsprechen; die Parameter der vier Punkte R genügen also der Gleichung:

$$8)\qquad \varkappa^4 - 2\varkappa^2(p - q) + 1 = 0.$$

Nach der Definition des Kegelschnittes F muß dieser durch die vier Punkte R hindurchgehen; außerdem müssen seine Tangenten

in den Punkten R zugleich Tangenten des Kegelschnittes φ sein. In der Tat geht die Gleichung 4b) in die Gleichung 8) über, wenn man für xyz ihre Parameterwerte setzt. Als Koordinaten der vier Punkte R erhält man:

8a) $$\sqrt{B-C}:\sqrt{C-A}:\sqrt{A-B}=\sqrt{a(b-c)}:\sqrt{b(c-a)}:\sqrt{c(a-b)}.$$

Zwischen den Kegelschnitten f und F besteht eine gewisse Wechselbeziehung hinsichtlich des Kegelschnittes φ; die Tangenten an f und F, gezogen in ihren Schnittpunkten R, berühren sämtlich den Kegelschnitt φ. Demgemäß bestimmen die Tangenten von φ auf jedem der beiden Kegelschnitte f und F eine zwei-zweideutige Verwandtschaft derart, daß je zwei sich entsprechende Punkte von f bzw. F zugleich konjugierte Punkte von F bzw. f sind. Sonach ist φ derjenige Kegelschnitt, dessen Tangenten die beiden Kegelschnitte f und F in harmonischen Punktepaaren schneiden.

3. Ich betrachte nun auf dem Kegelschnitt f zwei verschiedene zwei-zweideutige Verwandtschaften, die ich kurz V und V_1 nennen werde. So wie je zwei entsprechende Punkte von V auf einer Tangente von φ liegen oder sich als konjugierte Punkte von F darstellen, so werden je zwei entsprechende Punkte von V_1 auf Tangenten eines Kegelschnittes φ_1 liegen oder sich als konjugierte Punkte eines Kegelschnittes F_1 darstellen.

Die beiden Verwandtschaften V und V_1 sollen aber in einer ganz besonderen Abhängigkeit voneinander stehen. Halten wir die durch 2a) bestimmte Parameterverteilung auf f fest, so seien die Verwandtschaften dargestellt durch:

9) $$\begin{aligned} V &\mid \varkappa^2\lambda^2 - p(\varkappa^2+\lambda^2) + 2q\varkappa\lambda + 1 = 0 \\ V_1 &\mid \varkappa^2\lambda^2 - p_1(\varkappa^2+\lambda^2) + 2q_1\varkappa\lambda + 1 = 0. \end{aligned}$$

Zugleich sei:

10) $$\frac{1+p^2-q^2}{p} = \frac{1+p_1^2-q_1^2}{p_1},$$

oder: $$(p-p_1)(1-pp_1) = pq_1^2 - p_1q^2.$$

Diese Relation sagt nach 6) aus, daß in beiden Verwandtschaften die vier Punkte, denen nur ein einziger doppelt zählender Punkt entspricht, identisch sind. Mit anderen Worten: die beiden Kegelschnitte φ und φ_1 schneiden den Kegelschnitt f in den nämlichen vier Punkten S.

Man kann deshalb den Kegelschnitt φ_1 in der doppelten Form schreiben:

11a) $$\varphi_1 \equiv \frac{u^2}{a-\varrho} + \frac{v^2}{b-\varrho} + \frac{w^2}{c-\varrho} = 0,$$

11b) $$\varphi_1 \equiv (q_1 + p_1 - 1)u^2 + (q_1 + p_1 + 1)v^2 + 2p_1 w^2 = 0.$$

Ebenso nimmt der Kegelschnitt F_1 die doppelte Form an:

12a) $$F_1 \equiv \left(-\frac{1}{a-\varrho} + \frac{1}{b-\varrho} + \frac{1}{c-\varrho}\right)x^2 + \left(\frac{1}{a-\varrho} - \frac{1}{b-\varrho} + \frac{1}{c-\varrho}\right)y^2$$
$$+ \left(\frac{1}{a-\varrho} + \frac{1}{b-\varrho} - \frac{1}{c-\varrho}\right)z^2 = 0,$$

12b) $$F_1 \equiv (p_1 + 1)x^2 + (p_1 - 1)y^2 + q_1 z^2 = 0.$$

Wir wollen jetzt die beiden Verwandtschaften V und V_1 zusammensetzen. Zu diesem Zweck denken wir uns V_1 mit den Parametern λ und μ geschrieben. Einem Wert von $\varkappa$ entsprechen vermöge V zwei Werte λ und diesen vermöge V_1 je zwei Werte μ. Die Beziehung zwischen $\varkappa$ und μ ergibt sich durch Elimination von λ aus V und V_1; sie hat die Gleichung:

$$(\varkappa^4\mu^4 + 1)(p - p_1)^2 - 2(\varkappa^4\mu^2 + \mu^4\varkappa^2 + \varkappa^2 + \mu^2)(pq_1^2 + p_1 q^2)$$
$$+ 4(\varkappa^3\mu^3 + \varkappa\mu)(p + p_1)qq_1 + (\varkappa^4 + \mu^4)(1 - pp_1)^2$$
$$- 4(\varkappa^3\mu + \mu^3\varkappa)(1 + pp_1)qq_1 - 2\varkappa^2\mu^2[(p - p_1)^2$$
$$+ (1 - pp_1)^2 - 2q^2 - 2q_1^2 - 2p_1^2 q^2 - 2p^2 q_1^2] = 0.$$

Hier ist bereits eine Reduktion der Koeffizienten von $(\varkappa^4\mu^2 + \mu^2)$ und $(\mu^4\varkappa^2 + \varkappa^2)$ mit Hilfe der Gleichung 10) vorgenommen; ohne diese Reduktion wären dieselben verschieden.

Die vorstehende Gleichung stellt eine vier-vierdeutige symmetrische Beziehung $(V V_1)$ zwischen den Punkten des Kegelschnittes f dar. Es steht nun zu vermuten — und die Untersuchung bestätigt es — daß die Gleichung sich in zwei Faktoren zerspalten läßt, deren jeder eine zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen $\varkappa$ und μ darstellt. Legt man von einem der vier Punkte T aus die beiden Tangenten an φ_1 und schneiden diese den Kegelschnitt f in T_2 bzw. T_3, so entsprechen in der Beziehung $(V V_1)$ dem Punkte S die beiden Punkte T_2 und T_3 und zwar doppelt zählend. Kann man also die Verwandtschaft $(V V_1)$ in zwei Verwandtschaften V_2 und V_3 zerfällen, so wird in der einen dem Punkt S doppelt zählend der Punkt T_2 entsprechen, und ebenso wird ihm in der andern doppelt zählend der Punkt T_3 entsprechen. Daraus ist dann weiter zu schließen, daß entsprechende Punkte von V_2 auf Tangenten eines Kegelschnittes φ_2 liegen, der durch die vier Punkte S geht

und ST_2 berührt. Ebenso müssen entsprechende Punkte von V_3 auf Tangenten eines Kegelschnittes φ_3 liegen, der die vier Punkte S enthält und ST_3 berührt.

4. Es gilt nun zunächst zu zeigen, daß sich die Beziehung (VV_1) in die beiden Verwandtschaften:

$$13)\quad \begin{aligned} V_2 &\,|\, \varkappa^2\mu^2 - p_2(\varkappa^2+\mu^2) + 2q_2\varkappa\mu + 1 = 0, \\ V_3 &\,\ \ \varkappa^2\mu^2 - p_3(\varkappa^2+\mu^2) + 2q_3\varkappa\mu + 1 = 0, \end{aligned}$$

zerlegen läßt. Durch Vergleich finden wir die Relationen:

$$14)\quad \left|\begin{aligned} &p_2 + p_3 = 2(pq_1^2 + p_1q^2):(p-p_1)^2, \\ &q_2 + q_3 = 2qq_1(p+p_1):(p-p_1)^2, \\ &p_2p_3 = (1-pp_1)^2:(p-p_1)^2, \\ &p_2q_3 + p_3q_2 = 2qq_1(1+pp_1):(p-p_1)^2, \\ &\qquad\qquad 1 + p_2p_3 + 2q_2q_3 \\ &= -[(p-p_1)^2 + (1-pp_1)^2 - 2q^2 - 2q_1^2 - 2p^2q_1^2 - 2p_1^2q^2]:(p-p_1)^2. \end{aligned}\right.$$

Aus den ersten vier Relationen lassen sich p_2, p_3, q_2, q_3 berechnen, die so gewonnenen Werte müssen dann die fünfte Relation von selbst erfüllen.

Aus der ersten und dritten Relation folgen, wenn man gemäß Gleichung 10): $(p-p_1)(1-pp_1) = pq_1^2 - p_1q^2$ setzt, die Werte:

$$15)\quad \left|\begin{aligned} p_2 &= \left(\frac{q_1\sqrt{p} + q\sqrt{p_1}}{p-p_1}\right)^2 = \left(\frac{1-pp_1}{q_1\sqrt{p} - q\sqrt{p_1}}\right)^2, \\ p_3 &= \left(\frac{q_1\sqrt{p} - q\sqrt{p_1}}{p-p_1}\right)^2 = \left(\frac{1-pp_1}{q_1\sqrt{p} + q\sqrt{p_1}}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Mit Hilfe dieser Werte findet man mittels der zweiten und vierten Relation:

$$16)\quad \left|\begin{aligned} q_2 &= \frac{q_1\sqrt{p_1}(1-p^2) + q\sqrt{p}(1-p_1^2)}{(p-p_1)(q_1\sqrt{p} - q\sqrt{p_1})}, \\ q_3 &= \frac{-q_1\sqrt{p_1}(1-p^2) + q\sqrt{p}(1-p_1^2)}{(p-p_1)(q_1\sqrt{p} + q\sqrt{p_1})}. \end{aligned}\right.$$

Die letzte Relation 14) kann man mit Rücksicht auf die dritte auch schreiben:

$$q_2q_3 = -[(p-p_1)^2 + (1-pp_1)^2 - q^2 - q_1^2 - p^2q_1^2 - p_1^2q^2]:(p-p_1)^2.$$

Dieses Produkt müßte nach 16) übereinstimmen mit:

$$q_2q_3 = [-p_1q_1^2(1-p^2)^2 + pq^2(1-p_1^2)^2]:(p-p_1)^2(pq_1^2 - p_1q^2);$$

d. h. es müßte der Ausdruck:

$$\begin{aligned}&[(p-p_1)^2+(1-pp_1)^2](pq_1^2-p_1q^2)\\&-(q^2+q_1^2+p_1^2q^2+p^2q_1^2)(p-p_1)(1-pp_1)\\&-q_1p_1^2(1-p^2)^2+pq^2(1-p_1^2)^2\end{aligned}$$

verschwinden. In der Tat heben sich die Glieder mit dem Faktor q^2 gegenseitig weg und ebenso die Glieder mit dem Faktor q_1^2.

Hiermit ist nachgewiesen, daß die zusammengesetzte Verwandtschaft (VV_1) sich wirklich in zwei Verwandtschaften V_2 und V_3 von der Form 13) zerlegen läßt; durch die Gleichungen 15) und 16) wird diese Zerlegung direkt geleistet. Wir haben auch schon bemerkt, daß die beiden Kegelschnitte φ_2 bzw. φ_3, deren Tangenten aus f die Verwandtschaft V_2 bzw. V_3 ausschneiden, durch die vier Punkte S von f hindurchgehen müssen. Daraus folgt, daß die Wurzeln der Gleichung 6) für die Verwandtschaften V_2 und V_3 die nämliche Bedeutung besitzen, wie für die Verwandtschaften V und V_1. Sie stellen also für alle vier Verwandtschaften die Parameter derjenigen vier Punkte dar, denen nur je ein einziger doppelt zählender Punkt entspricht (freilich ist der entsprechende Punkt für jede Verwandtschaft ein anderer). Demgemäß müssen die vier Gleichungen 9) und 13) die Eigenschaft haben, daß das Verschwinden ihrer Diskriminanten auf die nämliche Gleichung 6) führt. Die Gleichung 10) muß sich also zur Gleichung:

$$\text{10a)}\quad \frac{1+p^2-q^2}{p}=\frac{1+p_1^2-q_1^2}{p_1}=\frac{1+p_2^2-q_2^2}{p_2}=\frac{1+p_3^2-q_3^2}{p_3}=k$$

erweitern, wo wir mit k den Wert dieser Quotienten bezeichnen.

Um dies auch durch die Rechnung nachzuweisen, bilden wir mit Hilfe von 15) und 16) direkt:

$$\begin{aligned}k=\frac{1}{p_2}+p_2-\frac{q_2^2}{p_2}&=\left(\frac{q_1\sqrt{p}-q\sqrt{p_1}}{1-pp_1}\right)^2+\left(\frac{q_1\sqrt{p}+q\sqrt{p_1}}{p-p_1}\right)^2\\&-\left(\frac{q_1\sqrt{p_1}(1-p^2)+q\sqrt{p}(1-p_1^2)}{(p-p_1)(1-pp_1)}\right)^2.\end{aligned}$$

Bringt man die rechte Seite auf gemeinsamen Nenner, so reduziert sich der Zähler auf drei Teile, von denen der erste die Glieder mit q_1^2, der zweite die mit q^2 und der dritte die mit q_1q umfaßt. Der dritte Teil hebt sich gliedweise weg, während die beiden ersten zu:

$$q_1^2(p-p_1)(1-pp_1)(1+p^2),\ \text{bzw.}: q^2(p_1-p)(1-pp_1)(1+p_1^2)$$

werden. Dadurch kommt:

$$k = \frac{1+p_2^2-q_2^2}{p_2} = \frac{q_1^2(1+p^2)-q^2(1+p_1^2)}{(p-p_1)(1-pp_1)}$$
$$= \frac{q_1^2(1+p^2-q^2)-q^2(1+p_1^2-q_1^2)}{(p-p_1)(1-pp_1)},$$

oder nach 10):

$$\frac{1+p_2^2-q_2^2}{p_2} = \frac{1+p^2-q^2}{p} \cdot \frac{pq_1^2-p_1q^2}{(p-p_1)(1-pp_1)} = \frac{1+p^2-q^2}{p}.$$

5. Sehen wir nun zu, wie die beiden zwei-zweideutigen Verwandtschaften V_2 und V_3, die sich bei der Zusammensetzung (VV_1) ergeben, miteinander zusammenhängen. Zunächst lehren die Werte von p_2, p_3, q_2, q_3, daß sie bei einer Vertauschung von p und q mit p_1 und q_1 ganz ungeändert bleiben, daß also die Zusammensetzungen (VV_1) und (V_1V) die nämlichen Verwandtschaften V_2 und V_3 liefern. Die Werte von p_2, p_3, q_2, q_3 kann man nach den Formeln 15) und 16) auch so schreiben, daß $\sqrt{pp_1}$ als einzige Wurzel auftritt. Kehrt man das Vorzeichen von $\sqrt{pp_1}$ um, so vertauschen sich p_2 und q_2 mit p_3 und q_3, also auch V_2 und V_3. Beide Verwandtschaften unterscheiden sich demnach nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{pp_1}$.

Wir fassen hier nur solche Verwandtschaften ins Auge, bei denen reelle Paare entsprechender Punkte existieren. Sollen auch V_2 und V_3 reell sein, so müssen auf dem Kegelschnitt f reelle Punkte vorhanden sein, denen sowohl in V als in V_1 reelle Punkte entsprechen. Ist aber λ ein solcher Punkt, so entsprechen ihm in V bzw. V_1 die Punkte:

$$\varkappa = \left[-\lambda q \pm \sqrt{p(\lambda^4 - k\lambda^2 + 1)}\right] : (\lambda^2 - p),$$
$$\text{bzw. } \mu = \left[-\lambda q_1 \pm \sqrt{p_1(\lambda^4 - k\lambda^2 + 1)}\right] : (\lambda^2 - p_1).$$

Sollen beide Werte zugleich reell sein, so müssen p und p_1 gleiches Vorzeichen besitzen, also $pp_1 > 0$ sein. Demnach wird $\sqrt{pp_1}$ reell: wir können also die Verwandtschaften V_2 und V_3 voneinander trennen, indem wir die eine dem Werte $+\sqrt{pp_1}$, die andere dem Werte $-\sqrt{pp_1}$ zuordnen.

Es ist nun weiter zu untersuchen, in welchem Zusammenhang die Verwandtschaften V_2 und V_3 einzeln mit den sie erzeugenden Verwandtschaften V und V_1 stehen. Nach den Gleichungen 2a) wird der Kegelschnitt f von $z = 0$ in den Punkten 0 und ∞, von

$x = 0$ aber in den Punkten $+1$ und -1 geschnitten. Setzen wir jetzt zur Abkürzung:

$$17) \qquad K = \sqrt{\lambda^4 - k\lambda^2 + 1},$$

so hat die Gleichung $K = 0$ entweder keine reelle Wurzel, d. h. die vier Punkte S sind imaginär falls $k < 2$ ist, oder sie hat vier reelle Wurzeln, d. h. die vier Punkte S sind reell, falls $k > 2$ ist. Im ersten Fall ist K^2 beständig positiv, im letzten Fall ist K^2 für die Werte 0 und ∞ positiv, dagegen für die Werte $+1$ und -1 negativ. In diesem Fall ordnet die Verwandtschaft V entweder den Punkten 0 und ∞ reelle Punkte zu, oder es tritt dies für die Punkte $+1$ und -1 ein. Wir dürfen aber annehmen, daß V stets den Punkten 0 und ∞ reelle Punkte zuordnet, wäre dies von vornherein nicht der Fall, so brauchte man nur die Seiten $x = 0$ und $z = 0$ des Koordinatendreiecks zu vertauschen. Nun sind die Verwandtschaften V und V_1 gegeben durch:

$$18) \qquad \begin{aligned} \varkappa &= \left(-\lambda q \pm K\sqrt{p}\right) : (\lambda^2 - p) \quad \text{bzw.} \\ \mu &= \left(-\lambda q_1 \pm K\sqrt{p_1}\right) : (\lambda^2 - p_1). \end{aligned}$$

Nach dem soeben Gesagten können p und p_1 positiv angenommen werden, und man hat in den Formeln 18) unter K, $\sqrt{p}$ und $\sqrt{p_1}$ *positive Größen* zu verstehen. Da es sich nur um entsprechende *reelle* Punkte bei V und ebenso bei V_1 handelt, kommen nur die reellen Werte von K in Betracht und etwa der Grenzfall $K = 0$. Sind die Punkte S imaginär, so ist K beständig reell. Sind die Punkte S reell, so zerlegen sie den Kegelschnitt f in vier Bogenstücke; hier ist K nur für die Punkte der beiden Bogenstücke reell, denen die Punkte 0 bzw. ∞ angehören. Die übrigen beiden Bogenstücke haben für V und V_1 keine Bedeutung; da ihren Punkten keine reellen Punkte entsprechen.

6. Die Verwandtschaft V wird vermittelt durch die Tangenten eines Kegelschnittes φ; die Tangenten aus dem Punkte λ von f schneiden auf f die beiden entsprechenden Punkte aus, deren Parameter $\varkappa$ nach 18) gefunden werden. Beide Punkte unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{p}$; demgemäß kann man die entsprechenden Punkte zu λ in leichtverständlicher Redeweise als Punkt positiver und als Punkt negativer Korrespondenz unterscheiden. In gleicher Weise kann man auch die beiden Tangenten aus λ kurz als positive und negative Tangente bezeichnen, je nachdem sie den

Punkt positiver oder negativer Korrespondenz liefert. Hier gilt nun der Satz: *Zieht man aus jedem Punkt von f an die Kegelschnitte φ und φ_1 die positiven (oder auch die negativen) Tangenten, so schneiden sie f in zwei Punkten, deren Verbindungslinie ständig einen Kegelschnitt φ_2 berührt. Zieht man jedoch an φ die positive (negative) und an φ_1 die negative (positive) Tangente, so umhüllen die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte einen Kegelschnitt φ_3.* Es ist dieser Satz nur ein präziserer Ausdruck des Resultates am Ende von Nr. 3. Wie bereits dort angegeben gehen die Kegelschnitte φ_2 und φ_3 durch die vier Punkte S; die Tangenten in einem jeden Punkte S an φ und φ_1 schneiden f in zwei Punkten, deren Verbindungslinie φ_2 und φ_3 berührt. Schon die stetige Aufeinanderfolge der Tangenten von φ_2 (bzw. φ_3) läßt die Wahrheit des Satzes erkennen; doch zeigt die Rechnung auch direkt, daß die Werte 18) in V_2 eingesetzt die Gleichung 13) erfüllen, wobei p_2 und q_2 aus 15) und 16) zu entnehmen sind.

Die Unterscheidung der Tangenten von φ als positive und negative kann auch rein geometrisch bewirkt werden. Zunächst gibt man φ einen bestimmten Durchlaufungssinn; dabei ist darauf zu achten, daß bei einer Hyperbel der Durchlaufungssinn beider Äste entgegengesetzt zu wählen ist. Denn nur dann wird man beim Durchlaufen das Innere der Kurve immer auf derselben Seite haben. Den beiden Tangenten an φ aus einem beliebigen Punkt gibt man ebenfalls einen Durchlaufungssinn, der von diesem Punkt nach den Berührungspunkten gerichtet ist. Dann wird der Sinn der *einen* Tangente mit dem Sinne der Kurve übereinstimmen, der der *anderen* dagegen nicht. Ist f eine Ellipse oder Parabel, so kann man für alle Punkte diejenige Tangente an φ als positiv annehmen, deren Sinn mit φ übereinstimmt. Ist dagegen f eine Hyperbel, so ist diese Annahme nur für den einen Ast von f zulässig; für den andern Ast hat die Tangente als positiv zu gelten, die entgegengesetzen Sinn wie φ hat.

Wenn nun auch die beiden positiven (oder negativen) Tangenten, aus einem beliebigen Punkt von f gezogen an φ und φ_1, zwei weitere Punkte aus f ausschneiden, die stets auf einer Tangente von φ_2 liegen, so läßt sich doch über den Sinn dieser Tangente nichts allgemein aussagen. Wir werden indes weiterhin die Mittel gewinnen gleichwohl unseren Sätzen eine genaue Fassung zu geben.

7. Wir gehen aus von einem Kegelschnitt f und einer Anzahl weiterer Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$, die f in den nämlichen

vier reellen oder imaginären Punkten S schneiden. Den Kegelschnitten φ_i erteilen wir einen bestimmten Durchlaufungssinn (bei Hyperbeln ist auf das vorher Gesagte zu achten); diesen dürfen wir bei jedem Kegelschnitt nach Willkür festsetzen. So kann man z. B. den Sinn bei allen Kurven φ_i in der Weise fixieren, daß man beim Durchlaufen das Innere der Kurve zur Linken hat.

Man wähle nun auf f einen beliebigen Anfangspunkt A, lege von A aus eine der beiden Tangenten an φ_1, sodann von ihrem zweiten Schnittpunkt B mit f eine der beiden Tangenten an φ_2, ferner von deren zweitem Schnittpunkt C mit f eine der beiden Tangenten an φ_3, und so fort; die letzte Tangente wird φ_n berühren und ihr auf f liegender Endpunkt mag N sein. Die n aufeinanderfolgenden Tangenten, von denen sich je zwei benachbarte auf f schneiden, sollen zusammenfassend als *ein f eingeschriebener n-gliedriger Tangentenzug* bezeichnet werden. Fallen Anfangs- und Endpunkt des Tangentenzuges zusammen, so heißen wir ihn *geschlossen*, sind sie dagegen verschieden, so heißt er *offen*; im letzteren Fall nennen wir die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt die *Schlußlinie des Tangentenzuges.*

Ist der Anfangspunkt A eines Tangentenzuges gegeben, hat man ferner die Reihenfolge festgesetzt, in der die Kegelschnitte φ_i von den aufeinanderfolgenden Tangenten des Zuges berührt werden sollen, so ist der Tangentenzug dadurch noch nicht bestimmt. Vielmehr gibt es noch 2^n derartige Tangentenzüge, da nicht nur die erste von A ausgehende, sondern auch jede folgende Tangente eine doppelte Wahl zuläßt. Es gilt nun die 2^n Tangentenzüge mit dem gleichen Anfangspunkt A und der nämlichen Reihenfolge der Kegelschnitte φ_i (aber verschiedenen Endpunkten) voneinander scharf zu trennen. Zu diesem Zwecke fassen wir die einzelnen Ecken des Tangentenzuges näher ins Auge; wir werden dann in jeder Ecke eine der beiden folgenden Möglichkeiten haben. Erstens die von der Ecke ausgehenden Tangenten besitzen beide den gleichen, oder beide den entgegengesetzten Durchlaufungssinn wie die von ihnen berührten Kegelschnitte φ; dabei ist der Durchlaufungssinn einer Tangente stets von der Ecke nach dem Berührungspunkt hin gerichtet. *In diesem Falle soll die Ecke kurz als positiv bezeichnet werden.* Zweitens der Durchlaufungssinn stimmt für *eine* aus der Ecke kommende Tangente mit dem der berührten Kurve φ überein, für die *andere* jedoch nicht. *In diesem Fall soll die Ecke negativ heißen.*

8. Ist der positive oder negative Charakter der einzelnen Ecken des f einzuschreibenden n-gliedrigen Tangentenzuges sowie sein Anfangspunkt A und die Reihenfolge der Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ festgesetzt, so ist der Tangentenzug selbst völlig bestimmt, sobald man weiß, ob die von A aus gezogene erste Tangente des Zuges mit der berührten Kurve φ gleichen Sinn hat oder nicht. Denn dann kennt man zunächst die erste Tangente AB; für die zweite Tangente BC hat man an und für sich noch eine zweifache Wahl, aber nur die eine davon entspricht dem festgesetzten Charakter der Ecke B; in gleicher Weise bestimmt sich die Tangente CD u. s. f.

Diesen Stipulationen gemäß können wir jetzt den einzelnen Tangentenzug bequem durch eine symbolische Bezeichnung darstellen. Zwischen Anfangspunkt A und Endpunkt N des Tangentenzuges schreiben wir die Zahlen 1, 2, 3 ..., n in einer vorgegebenen Folge; sie bestimmen die Reihenfolge der Kegelschnitte φ_i. Je zwei aufeinanderfolgende Zahlen verbinden wir durch das Zeichen + oder —, je nachdem die bezügliche Ecke in dem oben definierten Sinn positiv oder negativ ist. So stellt z. B. $[A+4-3-1+2-5-N]$ einen fünfgliedrigen Tangentenzug dar; seine Tangenten berühren der Reihe nach die Kegelschnitte $\varphi_4, \varphi_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$; die Ecke mit den Tangenten an φ_4 und φ_3 ist negativ, die Ecke mit den Tangenten an φ_1 und φ_2 ist positiv, u. s. f. Das positive Zeichen zwischen A und der ersten Tangente (an φ_4) soll aussagen, daß der Sinn der Tangente aus A an φ_4 mit dem Sinn von φ_4 übereinstimmt. Ebenso soll das negative Zeichen zwischen N und der letzten Tangente (an φ_5) aussagen, daß der Sinn der Tangente aus N an φ_5 dem Sinn von φ_5 entgegengesetzt ist.

Es könnte scheinen, als ob das Vorzeichen zwischen A und der ersten Tangente des Zuges eine wesentlich andere Bedeutung hätte, als das irgend eine Ecke des Tangentenzuges charakterisierende Vorzeichen. Dem ist jedoch nicht so. Man braucht den Kegelschnitten φ_i nur noch einen Kegelschnitt φ_0 hinzuzufügen und von A aus diejenige Tangente an φ_0 zu legen, die mit φ_0 gleichen Sinn hat; dann wird A zu einer Ecke und das vorher erwähnte Vorzeichen ist nichts anders als das charakteristische Vorzeichen dieser Ecke.

Der allgemeinste dem Kegelschnitt f eingeschriebene n-gliedrige Tangentenzug ist durch das Symbol $[A\varepsilon_0\alpha\varepsilon_1\beta\varepsilon_2\gamma\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n\nu\varepsilon_{n+1}N]$ dargestellt. Hierbei bedeuten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_n$ beliebig positive oder negative Vorzeichen (das Vorzeichen ε_{n+1} folgt aus den übrigen), und $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \nu$ stellen die Zahlen 1, 2, 3 ..., n in irgend einer

Reihenfolge dar. Hält man A und die Reihenfolge $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \nu$ fest, so gibt es noch 2^n Tangentenzüge gemäß den 2^n Vorzeichenkombinationen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$; ihre Endpunkte N sind im allgemeinen sämtlich verschieden. Hält man A fest, nimmt aber eine andere Reihenfolge, etwa: $\alpha', \beta', \gamma' \ldots, \nu'$, so erhält man abermals 2^n Tangentenzüge; ihre Endpunkte fallen, wie wir sehen werden, mit den 2^n Endpunkten der erstgenannten Tangentenzüge zusammen. Die Gesamtheit der 2^n Endpunkte aller von A ausgehenden n-gliedrigen Tangentenzüge bleibt völlig ungeändert, wie man auch die Reihenfolge $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \nu$ der Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$ festsetzen mag. Da man mit den n Kegelschnitten φ_i bezüglich ihrer Reihenfolge $n!$ Permutationen vornehmen kann, so existieren $n!$ Tangentenzüge mit dem gleichen Anfangspunkt A und dem gleichen Endpunkt N, die sich nur darin unterscheiden, daß die anfeinanderfolgenden Tangenten der einzelnen Züge die n Kegelschnitte φ_i in anderer Reihenfolge berühren. Es entsteht aber hier noch die weitere Frage, wie ordnen sich die 2^n Tangentenzüge, die zur Zahlenfolge $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \nu$ gehören, einzeln den 2^n Tangentenzügen zu, die zur Zahlenfolge $\alpha', \beta', \gamma' \ldots, \nu'$ gehören, so daß je zwei einander zugeordnete Tangentenzüge gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt besitzen. Es wird sich zeigen, daß diese Zuordnung in der Tat ganz genau angegeben werden kann; kennt man die Vorzeichen der Ecken des einen Tangentenzuges, so lassen sich daraus die Vorzeichen der Ecken des andern Tangentenzuges ableiten; mit der Wahl des ersteren ist also der letztere völlig bestimmt. Bevor wir jedoch diese Untersuchungen in Angriff nehmen können, müssen wir noch einige andere Betrachtungen vorausschicken.

9. Wir beschränken uns jetzt auf einen zweigliedrigen Tangentenzug ABC, wo AB eine Tangente von φ_1 und BC eine Tangente von φ_2 ist. Es gibt dann vier verschiedene Tangentenzüge $[A + 1 - 2 \pm C_1]$, $[A - 1 - 2 \pm C_2]$, $[A + 1 + 2 \pm C_3]$ und $[A - 1 + 2 \pm C_4]$ oder AB_1C_1, AB_2C_2, AB_1C_3 und AB_2C_4 (das Vorzeichen von C_i ist durch die beiden andern bedingt, sein wirklicher Wert ist hier ohne Belang). Die beiden Tangentenzüge AB_1C_1 und AB_2C_2 besitzen eine negative Ecke B_1 bzw. B_2, die beiden Tangentenzüge AB_1C_3 und AB_2C_4 besitzen eine positive Ecke B_1 bzw. B_2. Nach dem Satz in Nr. 6 berühren die Schlußlinien der Tangentenzüge mit negativer Ecke — nämlich AC_1 und AC_2 — einen bestimmten Kegelschnitt, etwa φ_3, der sich nicht ändert, wenn man A auf f fortwandern läßt. Auch die Schlußlinien

der Tangentenzüge mit positiver Ecke — nämlich AC_3 und AC_4 — berühren einen bestimmten Kegelschnitt, etwa φ_3', der sich nicht ändert, wenn A auf f fortwandert. Zu zwei beliebigen Kegelschnitten φ_1 und φ_2 gehört also ein bestimmter Kegelschnitt φ_3 derart, daß es unendlich viele f eingeschriebene Dreiecke gibt, von denen je zwei Seiten φ_1 und φ_2 berühren und eine negative Ecke bilden, während die dritte φ_3 berührt.

Es ist nun sofort ersichtlich, *daß die Seiten eines solchen Dreiecks entweder alle drei von den Kegelschnitten φ_i innerhalb berührt werden, so daß die Berührungspunkte zwischen den Endpunkten liegen, oder daß dieses nur mit einer Seite der Fall ist.* Sind nämlich ABC und $A'B'C'$ zwei benachbarte Dreiecke, wie wir sie hier betrachten, so können zwei Möglichkeiten eintreten. Entweder haben die kleinen Kurvenstücke AA', BB', CC' auf f den nämlichen Fortschreitungssinn; dann werden die Seiten AB, BC und CA von den benachbarten Geraden $A'B'$ bzw. $B'C'$ bzw. $C'A'$ in je einem Punkt geschnitten, der zwischen den Endpunkten der Seite gelegen ist. Diese Schnittpunkte sind aber nichts anderes, als die Berührungspunkte mit den Kegelschnitten φ_1, φ_2 und φ_3. Oder von den kleinen Kurvenstücken AA', BB', CC' haben zwei — etwa die beiden ersten — gleichen Sinn, das dritte aber entgegengesetzten Sinn. Dann liegt der Schnittpunkt von $A'B'$ mit der Seite AB zwischen ihren Endpunkten, dagegen liegen die Schnittpunkte von $B'C'$ mit der Seite BC und von $C'A'$ mit der Seite CA außerhalb ihrer Endpunkte; d. h. φ_1 berührt AB innerhalb; φ_2 und φ_3 berühren BC bzw. CA außerhalb.

10. Dieses Resultat gibt uns nun die Mittel an die Hand zu zeigen, *daß von den drei Ecken des Dreiecks ABC immer eine gerade Anzahl, also zwei oder keine, p o s i t i v sind.* Es mögen AB, BC, CA die Kegelschnitte φ_1, φ_2, φ_3 bzw. in T_1, T_2, T_3 berühren, und wir wollen zuerst annehmen, daß T_1, T_2, T_3 *innerhalb* der Seiten AB, BC und CA liegen. Dann wird von den beiden Tangenten AT_1 und BT_1 die eine mit φ_1 gleichen Sinn haben; ebenso wird es mit den Tangenten BT_2 und CT_2 hinsichtlich φ_2 und mit den Tangenten CT_3 und AT_3 hinsichtlich φ_3 sein. Setzen wir den Sinn von φ_1, φ_2 und φ_3 so fest, daß er mit dem Sinn von AT_1 bzw. BT_2 bzw. CT_3 übereinstimmt, so werden die drei Ecken des Dreiecks ABC *negativ* sein. Ändert man aber den Sinn einer Kurve φ_i, so gehen zwei negative Ecken des Dreiecks ABC in positive über.

Machen wir dagegen die Annahme, daß T_1 *innerhalb* AB, aber

T_2 und T_3 *außerhalb* BC und CA liegen, und erteilen wir wieder φ_1, φ_2 und φ_3 den Sinn von AT_1 bzw. BT_2 bzw. CT_3, so besitzen auch CT_2 und AT_3 den gleichen Sinn wie φ_2 bzw. φ_3, indessen BT_1 einen andern Sinn wie φ_1 aufweist. Sonach sind hier die Ecken A und C positiv, während die Ecke B negativ ist. Auch hier wird die Umkehrung des Sinnes von einer Kurve φ_i das Vorzeichen von zwei Ecken des Dreiecks ABC umkehren.

Es ist leicht zu übersehen, wie sich die gefundenen Resultate verallgemeinern. *Gibt es unendlich viele dem Kegelschnitt f eingeschriebene n-Ecke, deren Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte* φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *berühren, so liegt stets eine gerade oder ungerade Anzahl der n Berührungspunkte innerhalb der Seiten, je nachdem n gerade oder ungerade ist.* Es wird also immer eine *gerade* Anzahl unter den Kegelschnitten φ_i existieren, welche die bez. Seiten des n-Ecks *außerhalb* berühren, d. h. ihre Verlängerungen. *Gibt es unendlich viele dem Kegelschnitt f eingeschriebene n-Ecke, deren Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *berühren, so ist die Zahl der positiven Ecken eines solchen n-Ecks immer gerade.* Dabei ist es gleichgültig, wie man den Sinn der einzelnen Kegelschnitte φ_i festsetzt.

11. Wir gehen jetzt von einem ganz beliebigen dem Kegelschnitt f eingeschriebenen Dreieck ABC aus. Dann enthält der Büschel, der f in den vier (reellen oder imaginären) Grundpunkten S schneidet, zwei die Seite AB berührende Kegelschnitte φ_1 und ψ_1, ebenso zwei die Seite BC berührende Kegelschnitte φ_2 und ψ_2, endlich zwei die Seite CA berührende Kegelschnitte φ_3 und ψ_3. Da die Kegelschnitte eines Büschels eine jede Gerade in einer Punktinvolution schneiden, so wird jede Seite des Dreiecks ABC von einem der beiden berührenden Kegelschnitte innerhalb, von dem andern aber außerhalb berührt. Es mögen φ_1, φ_2, φ_3 die innerhalb und ψ_1, ψ_2, ψ_3 die außerhalb berührenden Kegelschnitte sein. Dann existieren unendlich viele f eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten die Kegelschnitte φ_1, φ_2, φ_3 berühren; es existieren aber auch unendlich viele f eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten φ_1, ψ_2, ψ_3 oder ψ_1, φ_2, ψ_3 oder ψ_1, ψ_2, φ_3 berühren. Denn wir haben in Nr. 9 gesehen, daß die dritten Seiten aller f eingeschriebenen Dreiecke, wenn zwei ihrer Seiten φ_1 und φ_2 berühren, stets einen Kegelschnitt φ_3 bzw. φ_3' tangieren, je nachdem die von diesen beiden Seiten gebildete Ecke positiv oder negativ ist. Daraus folgt das Gesagte mit Rücksicht auf die zuletzt ausgesprochenen Sätze.

Hiernach ergibt sich das Resultat: *Kann man dem Kegelschnitt f ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte φ_1, φ_2, φ_3 berühren, die mit f einen Büschel bilden, so gibt es unendlich viele derartige Dreiecke oder nicht, je nachdem jenes Dreieck eine gerade Anzahl von positiven Ecken hat oder nicht.* Oder wie man auch sagen kann: je nachdem von seinen drei Berührungspunkten eine gerade Anzahl außerhalb der Seiten liegt oder nicht. *Dabei besitzen die homologen Ecken der unendlich vielen Dreiecke den nämlichen, positiven oder negativen Charakter.* Das ist unmittelbar evident, wenn man den stetigen Übergang eines derartigen Dreiecks in ein anderes verfolgt. Eine Änderung in dem positiven oder negativen Charakter einer Ecke könnte ja nur eintreten, wenn bei diesem Übergang ein innerhalb der Seite liegender Berührungspunkt zu einem außerhalb liegenden wird oder umgekehrt. Das ist jedoch nur möglich, wenn bei dem Übergang der Berührungspunkt einmal in die Ecke rückt. Dann fällt aber diese Ecke mit einem der vier Grundpunkte S zusammen, und es rückt auch der Berührungspunkt der andern Seite, die von dieser Ecke ausgeht, in die Ecke hinein. Setzt man indessen den stetigen Übergang fort, so bleibt der Charakter der beiden andern Ecken völlig ungeändert; also muß das gleiche auch für den Charakter der dritten Ecke der Fall sein. Es gehen eben stets zwei innerhalb liegende Berührungspunkte gleichzeitig in zwei außerhalb liegende über oder umgekehrt.

12. Es gilt nun auch dieses Resultat wieder zu verallgemeinern und den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen. *Kann man dem Kegelschnitt f ein n-Eck einbeschreiben, dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte φ_1, φ_2, ..., φ_n berühren, die mit f einen Büschel bilden, so gibt es unendlich viele derartige n-Ecke oder nicht, je nachdem jenes n-Eck eine gerade Anzahl von positiven Ecken hat oder nicht* (je nachdem von seinen n Berührungspunkten eine *gerade* Anzahl außerhalb seiner Seiten liegt oder nicht). *Dabei besitzen die homologen Ecken aller unendlich vielen n-Ecke den nämlichen positiven oder negativen Charakter.* Man kann diesem Satz auch die folgende Form geben: *Schreibt man einem Kegelschnitt f unendlich viele $(n - 1)$-gliedrige Tangentenzüge ein und berühren ihre Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1} eines Büschels, dem auch f angehört, während je zwei homologe Ecken gleichen, positiven oder negativen Charakter aufweisen, so berühren die Schlußlinien sämtlicher Tangentenzüge einen bestimmten Kegelschnitt φ_n aus jenem Büschel.* Offenbar läßt unser Satz auch die

weitere Fassung zu: *Schreibt man einem Kegelschnitt f ein beliebiges n-Eck ein, legt man ferner durch vier feste, reelle oder imaginäre Punkte von f einen Kegelschnittbüschel, so wird jede Seite des n-Ecks von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt werden derart, daß der eine sie innerhalb und der andere sie außerhalb tangiert. Wählt man von diesen $2n$ Kegelschnitten eine Gruppe von n Kegelschnitten in der Weise aus, daß jede Seite einen davon berührt und daß von ihren Berührungspunkten eine gerade Anzahl außerhalb der bez. Seiten liegen, so gibt es unendlich viele n-Ecke, deren Seiten diese n Kegelschnitte tangieren und deren Ecken auf f liegen.*

Um die soeben ausgesprochenen Sätze über das n-Eck zu beweisen, gehen wir von den entsprechenden Sätzen über das Dreieck aus und benutzen die Schlußweise von $(n-1)$ auf n. Es sei ein $(n-1)$-gliedriger Tangentenzug $ABC \ldots MN$ gegeben, dessen Ecken auf f liegen und dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ berühren, wobei diese φ_i mit f einen Büschel bilden. Der Sinn von φ_1 werde beliebig festgesetzt; den Sinn von φ_2 wählen wir dann so, daß die erste Ecke B des Tangentenzuges negativ wird; ebenso wählen wir den Sinn von $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_{n-1}$ derart, daß seine zweite, dritte, ..., $(n-2)^{\text{te}}$ Ecke negativ wird. Wir ziehen nun einerseits die Schlußlinie AN des $(n-1)$-gliedrigen Tangentenzuges und andererseits die Schlußlinie AM des $(n-2)$-gliedrigen Tangentenzuges, der aus jenem nach Weglassen des letzten Gliedes hervorgeht. Neben diesem $(n-1)$-gliedrigen Tangentenzug denken wir uns noch beliebig viele analoge Tangentenzüge gezeichnet, deren Seiten die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ in der nämlichen Reihenfolge berühren und deren Ecken sämtlich negativ sind. Lassen wir bei allen diesen $(n-1)$-gliedrigen Tangentenzügen das letzte Glied weg und nehmen wir an, daß der Satz für die restierenden $(n-2)$-gliedrigen Tangentenzüge gilt, so werden alle ihre Schlußlinien, die zu AM homolog sind, einen gewissen Kegelschnitt φ' aus dem Büschel berühren. Durch passende Wahl des Sinnes von φ' wird die Ecke A und folglich auch die Ecke M des $(n-1)$-Ecks $ABC \ldots M$ negativ, so daß dasselbe lauter negative Ecken anfweist. Das Gleiche muß für alle analogen $(n-1)$-Ecke der Fall sein, da hier nach unserer Annahme der Satz Gültigkeit hat. Nun bilden die Tangenten aus M an φ_{n-2} und an φ' eine negative Ecke; nach unserer ursprünglichen Festsetzung bilden aber auch die Tangenten aus M an φ_{n-2} und φ_{n-1} eine negative Ecke; demnach bilden die Tangenten aus M an φ'

und φ_{n-1} eine positive Ecke. Das Dreieck AMN hat in M eine positive Ecke, seine Seiten MA und MN berühren die Kegelschnitte φ' bzw. φ_{n-1}. Die gleichen Eigenschaften zeigen die analogen Dreiecke, die in derselben Weise mit den andern $(n-1)$-gliedrigen Tangentenzügen zusammenhängen. Die dritten Seiten dieser Dreiecke berühren nach dem Satz in Nr. 6 einen bestimmten Kegelschnitt, den wir φ_n nennen. Durch passende Wahl des Sinnes von φ_n kann in dem Dreieck AMN die Ecke N negativ gemacht werden, die Ecke A ist dann positiv. Nach dem Satz in Nr. 11 gilt das gleiche für die homologen Ecken der analogen Dreiecke. Das hat zur Folge, daß sämtliche Ecken des n-Ecks $ABC\ldots MN$ und ebenso die aller analogen n-Ecke negativ sind. Es gibt sonach unendlich viele dem Kegelschnitt f eingeschriebene n-Ecke mit lauter negativen Ecken, welche die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in der nämlichen Reihenfolge berühren. Hierbei war vorausgesetzt, daß dieser Satz bereits für $(n-1)$-Ecke erwiesen sei; für Dreiecke ist er aber bereits nachgewiesen, folglich gilt er allgemein. Ändert man den Sinn eines Kegelschnittes φ_i, so werden die beiden Ecken die auf der Tangente von φ_i liegen, positiv. Ändert man also den Sinn mehrerer Kegelschnitte φ_i, so wird eine gerade Anzahl von Ecken des n-Ecks positiven Charakter annehmen. Aus unseren Betrachtungen geht weiter hervor: *falls es unendlich viele f einbeschriebene und $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$ umschriebene n-Ecke gibt, umhüllen auch ihre homologen Diagonalen Kegelschnitte des Büschels.*

13. Wir kehren zurück zu den zweigliedrigen Tangentenzügen. Von einem Punkte A auf f ausgehend kann man vier zweigliedrige Tangentenzüge $(\varphi_1\varphi_2)$ und ebenso vier zweigliedrige Tangentenzüge $(\varphi_2\varphi_1)$ ziehen, wo in leicht verständlicher Weise durch $(\varphi_1\varphi_2)$ bzw. $(\varphi_2\varphi_1)$ die Reihenfolge der berührten Kegelschnitte markiert werden soll. Die Kegelschnitte φ_1 und φ_2 bestimmen auf f je eine zwei-zweideutige Verwandtschaft V_1 bzw. V_2; ihre Zusammensetzung $(V_1 V_2)$ ordnet dem Punkt A vier Punkte C_1, C_2, C_3, C_4 zu. Diese Punkte sind einerseits die Endpunkte der vier Tangentenzüge $(\varphi_1\varphi_2)$, andererseits enden in ihnen auch die vier Tangentenzüge $(\varphi_2\varphi_1)$; denn, wie wir früher sahen, sind die Verwandtschaften $(V_1 V_2)$ und $(V_2 V_1)$ identisch. $(V_1 V_2)$ zerfällt in zwei zwei-zweideutige Verwandtschaften; in der einen mögen dem Punkte A die Punkte C_1 und C_2, in der anderen die Punkte C_3 und C_4 entsprechen. Dann sind AC_1 und AC_2 die Schlußlinien zweier Tangentenzüge $(\varphi_1\varphi_2)$ mit negativer Ecke; denn nach Nr. 6 müssen die Ecken beider Tangentenzüge den nämlichen

positiven oder negativen Charakter haben; man kann ihn daher bei beiden negativ machen, wenn man den Sinn von φ_1 und φ_2 passend wählt. Ich behaupte nun: *sollen zwei Tangentenzüge* $(\varphi_1\varphi_2)$ *und* $(\varphi_2\varphi_1)$ *in ihren Endpunkten übereinstimmen, so müssen entweder beide eine negative oder beide eine positive Ecke besitzen.* Es läßt sich das direkt aus den Formeln 15) und 16) und den Betrachtungen in Nr. 6 schließen. Wir können dafür aber auch einen einfachen Beweis erbringen, der uns zugleich noch einen wichtigen Aufschluß liefert.

Zu diesem Zweck legen wir den Punkt A in den Punkt $x = 0$, d. h. in den einen Schnittpunkt von f mit der Geraden $z = 0$ (vgl. Nr. 5 und Formel 2a). Jetzt ziehen wir einen Tangentenzug $(\varphi_1\varphi_2)$, etwa AB_1C_1, und bestimmen den Sinn von φ_1, φ_2 und φ_3 derart, daß alle drei Ecken des Dreiecks AB_1C_1 negativ werden. Ferner verbinden wir A, B_1 und C_1 mit dem Punkte $x = y = 0$; die erstere Gerade berührt f in A, die letzteren schneiden f noch in den Punkten B_2 bzw. C_2. Da $x = y = 0$ der Pol von $z = 0$ in bezug auf die Kegelschnitte $f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ist, berühren die Seiten des Dreiecks AB_2C_2 ebenfalls die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, und zwar wird φ_1 die Seiten AB_1 und AB_2 entweder beide innerhalb oder beide außerhalb berühren; ebenso wird sich φ_2 gegen B_1C_1 und B_2C_2 gleich verhalten und auch φ_3 gegen C_1A und C_2A. Daraus folgt, daß auch die Ecken des Dreiecks AB_2C_2 alle drei negativ sind. Nun lassen wir die Punkte A, B_2, C_2 auf f stetig fortrücken, doch so daß die Seiten des Dreiecks AB_2C_2 ständig die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ berühren. Hierbei ändert sich nach Nr. 11 der negative Charakter seiner Ecken nicht. Rückt bei dieser Bewegung der Punkt C_2 nach A, so rückt gleichzeitig A nach C_1; denn C_2A muß als Tangente von φ_3 in seiner neuen Lage entweder mit AC_1 oder mit AC_2 zusammenfallen, das letztere ist aber unmöglich; zugleich mag B_2 nach B' gelangen. Während AB_1C_1 einen Tangentenzug $(\varphi_1\varphi_2)$ darstellt, haben wir in $AB'C_1$ einen Tangentenzug $(\varphi_2\varphi_1)$ vor uns; ihre Ecken B_1 bzw. B' sind negativ. Da ferner sowohl AB_1 und AC_1 als auch AB' und AC_1 eine negative Ecke miteinander bilden, so schließen AB_1 und AB' und in gleicher Weise auch C_1B_1 und C_1B' eine positive Ecke ein. AB_1C_1B' ist also ein Viereck mit zwei negativen Gegenecken A und C_1 und zwei positiven Gegenecken B_1 und B', dessen Gegenseiten AB_1 und C_1B' von φ_1 und dessen Gegenseiten B_1C_1 und $B'A$ von φ_2 berührt werden. Daher der Satz: *Sind* f, φ_1, φ_2 *drei beliebige Kegelschnitte eines Büschels, so kann man* f *un-*

endlich viele Vierecke von der Art einbeschreiben, daß zwei Gegenseiten φ_1 die beiden anderen φ_2 berühren. Zwei Gegenecken eines solchen Vierecks sind stets negativ, die beiden anderen positiv; seine beiden Diagonalen berühren ständig zwei feste Kegelschnitte φ_3 und φ_3' des Büchels.

14. Dieser Satz läßt sich sofort auf die n-gliedrigen Tangentenzüge anwenden. Wählt man den Sinn der Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ passend, so sind sämtliche Ecken des Tangentenzuges negativ. Nach dem voranstehenden Satz kann man irgend zwei benachbarte Glieder des Tangentenzuges durch zwei neue Glieder ersetzen, nur daß diese die beiden von jenen tangierten Kegelschnitte in umgekehrter Reihenfolge berühren. Dabei erfahren drei benachbarte Ecken des Tangentenzuges eine Änderung; die mittlere von ihnen erhält eine veränderte Lage auf f, die beiden andern behalten ihre Lage bei, ändern aber die Richtung eines Schenkels. Bei dieser Abänderung des Tangentenzuges bleibt aber der negative Charakter der drei Ecken erhalten, was sich unmittelbar aus dem letzten Satz ergibt. Durch wiederholte Vertauschung benachbarter Kegelschnitte in der Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ erhält man bekanntlich jede beliebige Permutation der Reihe, was zu folgendem Satz führt: *Schreibt man dem Kegelschnitt f von einem Punkte A ausgehend zwei n-gliedrige Tangentenzüge ein, deren Seiten die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ berühren aber in verschiedener Reihenfolge, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß auch ihre Endpunkte übereinstimmen, die folgende: Wählt man den Sinn der Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in passender Weise, so daß sämtliche Ecken des einen Tangentenzuges negativ werden, dann müssen auch alle Ecken des anderen negativ werden; zugleich müssen ihre Anfangsglieder in A* (und ebenso ihre Endglieder in N) *eine positive Ecke bilden.* Natürlich gibt es $n!$ derartige n-gliedrige Tangentenzüge mit gleichem Anfangspunkt A und gleichem Endpunkte N entsprechend den $n!$ Permutationen der Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Schließt sich der n-gliedrige Tangentenzug, dann erhält man noch das weitere Resultat: *Sind $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die Kegelschnitte eines Büchels, und kann man f unendlich viele n-Ecke einbeschreiben, deren Seiten die Kegelschnitte φ_i in der Reihenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ berühren, so kann man f auch unendlich viele n-Ecke einbeschreiben, deren Seiten die Kegelschnitte φ_i in jeder andern vorgegebenen Reihenfolge berühren. Bestimmt man dabei den Sinn dieser Kegelschnitte so, daß alle Ecken der erstgenannten n-Ecke negativ werden, dann tritt gleiches auch für die übrigen n-Ecke ein.* Von den

$(n+1)$ Kegelschnitten des Büchels kann man alle bis auf einen beliebig wählen, dieser ist dann eindeutig bestimmt.

15. Die bislang gewonnenen Resultate mögen noch einige Anwendungen finden. Läßt man die Kegelschnitte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in einen einzigen Kegelschnitt φ zusammenfallen, so werden die beiden aus einem Punkt von f an φ gezogenen Tangenten stets eine negative Ecke bilden, und es erübrigt eine besondere Bemerkung hierüber zu machen. Man hat also den Satz: *Sind zwei Kegelschnitte f und φ so beschaffen, daß ein dem ersteren eingeschriebenes n-Eck dem letzteren zugleich umgeschrieben ist, so existieren unendlich viele derartige n-Ecke. Auch alle gleichartigen Diagonalen berühren einen und denselben Kegelschnitt, der sich bei Variation des n-Ecks nicht ändert.* Unter gleichartigen Diagonalen verstehen wir hierbei die Verbindungslinien solcher Ecken, welche eine bestimmte Anzahl Seiten (k oder $n-k$) zwischen sich einschließen. *Ist insbesondere n eine gerade Zahl, so gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken des n-Ecks durch einen festen Punkt, nämlich durch eine der Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von f und φ.*

16. Eine zweite Anwendung machen wir auf eine Schar konfokaler Kegelschnitte. Um dies zu bewerkstelligen, müssen wir zu den aufgestellten Sätzen zunächst die dualen ableiten; wir können uns jedoch dabei auf den Fall des Dreiecks beschränken, er gibt unmittelbar auch den nötigen Aufschluß für das n-Eck. Der Satz in Nr. 11 lautet in dualer Übertragung: *Kann man dem Kegelschnitt f ein Dreieck umschreiben, dessen Ecken auf den Kegelschnitten φ_1, φ_2, φ_3 liegen, die mit f eine Schaar bilden, so gibt es unendlich viele derartige Dreiecke oder nicht, je nachdem das Dreieck eine gerade Anzahl von Ecken aufweist, in denen die Tangente an den bez. Kegelschnitt φ_i den Kegelschnitt f schneidet, oder nicht.* Daß dies wirklich der duale Ausdruck jenes Satzes ist, lehrt folgende Überlegung. Es seien die Seiten zweier benachbarter dem Kegelschnitt f umschriebener Dreiecke mit a, b, c bzw. a_1, b_1, c_1 und ihre Berührungspunkte mit A, B, C bzw. A_1, B_1, C_1 bezeichnet. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder alle drei Bogenstücke AA_1, BB_1, CC_1 auf der Kurve f haben den nämlichen Fortschreitungssinn, oder der Fortschreitungssinn von CC_1 ist dem von AA_1 und BB_1 entgegengesetzt. Hierbei ist die Kurve f, sei sie Ellipse, Parabel oder Hyperbel, als durch die stetige Bewegung eines Punktes erzeugt gedacht. Im ersten Fall wird der Schnittpunkt $a_1 \times b_1$ in demjenigen Winkelraum der Geraden a und b liegen, der den Kegelschnitt f nicht einschließt; es wird also die

Tangente im Punkte $a \times b$ des Kegelschnittes φ_1 den Kegelschnitt f nicht schneiden. Ebenso wenig wird die Tangente von φ_2 im Punkte $b \times c$ und die Tangente von φ_3 im Punkte $c \times a$ von f geschnitten. Im zweiten Fall gilt für den Punkt $a \times b$ das nämliche wie vorher; dagegen liegt der Punkt $b_1 \times c_1$ mit dem Kegelschnitt f in dem gleichen Winkelraum der Geraden b und c. Die Tangente von φ_2 im Punkte $b \times c$ schneidet also f, und ebenso tut dies die Tangente von φ_3 im Punkte $c \times a$. Damit ist aber die Dualität des Satzes zu dem früheren erwiesen.

Im speziellen gilt der Satz: *Liegen die Ecken eines der Ellipse f (Hyperbel) umschriebenen Dreiecks auf den zu f konfokalen Kegelschnitten φ_1, φ_2, φ_3, so gibt es unendlich viele derartige Dreiecke oder nicht, je nachdem eine gerade Anzahl der Kegelschnitte φ_1, φ_2, φ_3 Hyperbeln (Ellipsen) sind oder nicht.* Liegen die Ecken eines der Ellipse f (Hyperbel) umgeschriebenen n-Ecks auf n zu f konfokalen Kegelschnitten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, so gibt es unendlich viele derartige n-Ecke oder nicht, je nachdem eine gerade Anzahl der Kegelschnitte φ_i Hyperbeln (Ellipsen) sind oder nicht. *Schreibt man einem Kegelschnitt f ein beliebiges n-Eck um und legt durch jede der n Ecken die beiden zu f konfokalen Kegelschnitte, so kann man das n-Eck variieren, indem man $(n - 1)$ seiner Ecken auf irgend $(n - 1)$ unter den konfokalen Kegelschnitten fortschreiten läßt; dann bewegt sich auch die letzte Ecke auf einem konfokalen Kegelschnitt. Ist f eine Ellipse (Hyperbel), so bewegt sich eine gerade Anzahl der n Ecken auf Hyperbeln (Ellipsen).*

17. Die dualistische Übertragung des Satzes in Nr. 14 erfordert zuvor noch einige Bemerkungen. Wir haben früher den Begriff der positiven und der negativen Ecke eingeführt; es geschah dies zu dem Zwecke eine charakteristische Eigenschaft der Ecke anzugeben, die bei den eintretenden stetigen Änderungen der Ecke erhalten bleibt. In gleicher Weise müssen wir hier den Begriff der positiven und negativen Seite einführen, der von einer eintretenden stetigen Änderung der Seite unabhängig ist. Wir erteilen der Kurve φ_1 einen bestimmten Durchlaufungssinn, entweder so daß das Innere der Kurve ständig zur Linken, oder so daß es ständig zur Rechten bleibt (bei einer Hyperbel ist also der Sinn in beiden Ästen entgegengesetzt). Wir schneiden jetzt φ_1 mit einer Geraden g und bezeichnen die beiden längs g aneinandergrenzenden Gebiete der Ebene irgendwie als linkes und rechtes Ufer von g. Dann wird beim Durchlaufen von φ_1 einmal ein Übergang vom linken

zum rechten Ufer von g und einmal ein Übergang vom rechten zum linken Ufer von g stattfinden. Nehmen wir noch einen Kegelschnitt φ_2 hinzu und erteilen auch ihm einen bestimmten Durchlaufungssinn, so werden sich auch seine Schnittpunkte mit g dadurch voneinander unterscheiden, daß im einen der Übergang vom linken zum rechten Ufer, im andern der Übergang vom rechten zum linken stattfindet. Auf g liegen nun vier Strecken, die einerseits von φ_1 und andererseits von φ_2 begrenzt werden. Von diesen vier Strecken sind stets zwei positiv und zwei negativ, wenn wir unter einer positiven Strecke eine solche verstehen, in deren Endpunkten die Kurven φ_1 und φ_2 beim Durchlaufen entweder beide vom linken auf das rechte Ufer, oder beide vom rechten auf das linke Ufer übertreten. Bei einer negativen Strecke ist demnach das Verhalten von φ_1 und φ_2 in den beiden Endpunkten verschieden. Man macht sich leicht klar, daß der positive oder negative Charakter einer Strecke erhalten bleibt, wenn ihre Endpunkte auf φ_1 und φ_2 wandern, während sie tangential an f bleibt. Ich unterdrücke hier den Beweis. Ferner leuchtet ein, daß man irgend eine der vier Strecken auf g negativ machen kann, wenn man den Sinn von φ_1 und φ_2 passend wählt. Nun lautet der duale Satz: *Sind f, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ konfokale Kegelschnitte und kann man f unendlich viele n-Ecke umschreiben, deren Ecken auf den Kegelschnitten φ_i in der Reihenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ liegen, so kann man f auch unendlich viele n-Ecke umschreiben, deren Ecken auf den Kegelschnitten φ_i in jeder anderen vorgegebenen Reihenfolge liegen. Bestimmt man hierbei den Sinn dieser Kegelschnitte so, daß alle Seiten der erstgenannten n-Ecke negativ sind, dann tritt gleiches auch für die übrigen n-Ecke ein.* Von jenen konfokalen Kegelschnitten kann man alle bis auf einen beliebig wählen, dieser ist dann eindeutig bestimmt. Zuletzt mag noch der folgende Satz erwähnt werden: *Sind f, φ_1, φ_2 drei beliebige konfokale Kegelschnitte, so kann man f stets unendlich viele Vierecke von der Art umschreiben, daß zwei Gegenecken auf φ_1, die beiden andern auf φ_2 liegen. Zwei Gegenseiten eines solchen Vierecks sind stets negativ, die beiden andern positiv; der Schnittpunkt zweier Gegenseiten liegt auf einem konfokalen Kegelschnitt φ_3, der der beiden andern auf einem konfokalen Kegelschnitt φ_3'.*

18. Wir legen uns jetzt die Frage vor: *welche analytische Beziehung besteht zwischen den Kegelschnitten $f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ eines Büschels, wenn ein Schließungssatz gelten soll, d. h. wenn unendlich viele f eingeschriebene Dreiecke existieren sollen, deren Seiten φ_1, φ_2 und φ_3*

berühren. Zu dieser analytischen Beziehung können wir auf verschiedenen Wegen gelangen. Sie spricht sich z. B. in der Gleichung 15) aus mit Berücksichtigung der Gleichung 10). In diese Gleichung hat man die Koeffizienten von φ_1, φ_2, φ_3 einzuführen; doch gestaltet sich die Rechnung kompliziert.

Um zu der gewünschten Beziehung zu gelangen, setzen wir zunächst (vgl. 1b):

$$19)\quad \begin{cases} \varphi_1 \equiv \dfrac{u^2}{a-\varrho} + \dfrac{v^2}{b-\varrho} + \dfrac{w^2}{c-\varrho} = 0, \\ \varphi_2 \equiv \dfrac{u^2}{a-\sigma} + \dfrac{v^2}{b-\sigma} + \dfrac{w^2}{c-\sigma} = 0, \\ \varphi_3 \equiv \dfrac{u^2}{a-\tau} + \dfrac{v^2}{b-\tau} + \dfrac{w^2}{c-\tau} = 0, \end{cases}$$

ferner entsprechend 5a) zur Abkürzung:

$$20)\quad \begin{cases} A_\varrho \equiv -\dfrac{1}{a-\varrho} + \dfrac{1}{b-\varrho} + \dfrac{1}{c-\varrho}, \\ B_\varrho \equiv +\dfrac{1}{a-\varrho} - \dfrac{1}{b-\varrho} + \dfrac{1}{c-\varrho}, \\ C_\varrho \equiv +\dfrac{1}{a-\varrho} + \dfrac{1}{b-\varrho} - \dfrac{1}{c-\varrho}, \end{cases}$$

und eine analoge Bedeutung sollen A_σ, B_σ, C_σ, A_τ, B_τ, C_τ haben. Aus den Gleichungen 20) folgt:

$$21)\quad \begin{gathered} A_\varrho + B_\varrho = \frac{2}{c-\varrho}, \quad A_\varrho - B_\varrho = \frac{2(a-b)}{(a-\varrho)(b-\varrho)}, \\ A_\varrho^2 - B_\varrho^2 = \frac{4(a-b)}{(a-\varrho)(b-\varrho)(c-\varrho)}. \end{gathered}$$

Hieraus folgt ferner:

$$22)\quad \begin{cases} (a-b):(b-c):(c-a) = (A_\varrho^2 - B_\varrho^2):(B_\varrho^2 - C_\varrho^2):(C_\varrho^2 - A_\varrho^2), \\ \qquad = (A_\sigma^2 - B_\sigma^2):(B_\sigma^2 - C_\sigma^2):(C_\sigma^2 - A_\sigma^2), \\ \qquad = (A_\tau^2 - B_\tau^2):(B_\tau^2 - C_\tau^2):(C_\tau^2 - A_\tau^2), \end{cases}$$

sowie:

$$23)\quad \begin{cases} A_\varrho^2 (b-c) + B_\varrho^2 (c-a) + C_\varrho^2 (a-b) = 0 \\ (B_\varrho^2 C_\sigma^2 - C_\varrho^2 B_\sigma^2) : (C_\varrho^2 A_\sigma^2 - A_\varrho^2 C_\sigma^2) : (A_\varrho^2 B_\sigma^2 - B_\varrho^2 A_\sigma^2) = \\ \qquad = (b-c):(c-a):(a-b), \\ B_\varrho^2 C_\sigma^2 - C_\varrho^2 B_\sigma^2 + C_\varrho^2 A_\sigma^2 - A_\varrho^2 C_\sigma^2 + A_\varrho^2 B_\sigma^2 - B_\varrho^2 A_\sigma^2 = 0 \\ A_\varrho^2 B_\sigma^2 C_\tau^2 + B_\varrho^2 C_\sigma^2 A_\tau^2 + C_\varrho^2 A_\sigma^2 B_\tau^2 - A_\varrho^2 C_\sigma^2 B_\tau^2 - B_\varrho^2 A_\sigma^2 C_\tau^2 - \\ \qquad - C_\varrho^2 B_\sigma^2 A_\tau^2 = 0. \end{cases}$$

Nun wissen wir, wenn wir in einem der vier Grundpunkte S des Büschels die Tangenten an φ_1 und φ_2 ziehen, so schneiden diese aus dem Kegelschnitt f zwei Punkte aus, deren Verbindungslinie φ_3 berührt. Diese beiden Schnittpunkte haben nach 7a) die Koordinaten:

$$A_\varrho\sqrt{b-c},\quad B_\varrho\sqrt{c-a},\quad C_\varrho\sqrt{a-b},$$

und:

$$A_\sigma\sqrt{b-c},\quad B_\sigma\sqrt{c-a},\quad C_\sigma\sqrt{a-b}.$$

Für die Koordinaten ihrer Verbindungslinie kommt:

$$u:v:w=\frac{B_\varrho C_\sigma - C_\varrho B_\sigma}{\sqrt{b-c}}:\frac{C_\varrho A_\sigma - A_\varrho C_\sigma}{\sqrt{c-a}}:\frac{A_\varrho B_\sigma - B_\varrho A_\sigma}{\sqrt{a-b}}.$$

Diese Werte in die Gleichung von φ_3 eingesetzt liefern die Gleichung:

$$24\text{a)}\quad \frac{(B_\varrho C_\sigma - C_\varrho B_\sigma)^2}{(b-c)(a-\tau)}+\frac{(C_\varrho A_\sigma - A_\varrho C_\sigma)^2}{(c-a)(b-\tau)}+\frac{(A_\varrho B_\sigma - B_\varrho A_\sigma)^2}{(a-b)(c-\tau)}=0.$$

Nun ist aber:

$$B_\varrho C_\sigma - C_\varrho B_\sigma = 2(b-c)(\varrho-\sigma)\frac{(a-\varrho)(a-\sigma)-(a-b)(a-c)}{(a-\varrho)(b-\varrho)(c-\varrho)(a-\sigma)(b-\sigma)(c-\sigma)},$$

so daß die Gleichung 24a) übergeht in:

$$(b-c)(b-\tau)(c-\tau)[(a-\varrho)(a-\sigma)-(a-b)(a-c)]^2+\cdot+\cdot=0.$$

Die Ausrechnung liefert:

$$24)\quad \begin{aligned}&[(\varrho\sigma+\sigma\tau+\tau\varrho)-(ab+bc+ca)]^2-\\&-4(\varrho\sigma\tau-abc)(\varrho+\sigma+\tau-a-b-c)=0.\end{aligned}$$

Dier hier gegebene Ableitung können wir noch in folgender Weise abändern, so daß das erzielte Resultat sofort in symmetrischer Weise auftritt. Legt man nämlich in einem Grundpunkte S wieder die Tangenten an die Kegelschnitte φ_1 und φ_2, so schneiden sie f in zwei Punkten, die nicht nur einer Tangente von φ_3 angehören, sondern auch (vgl. 4) konjugiert sind in bezug auf den Kegelschnitt:

$$A_\tau x^2 + B_\tau y^2 + C_\tau z^2 = 0,$$

was unmittelbar die Relation liefert:

$$24\text{b)}\quad A_\varrho A_\sigma A_\tau(b-c)+B_\varrho B_\sigma B_\tau(c-a)+C_\varrho C_\sigma C_\tau(a-b)=0.$$

Natürlich führt die Ausrechnung dieser Formel wieder auf 24).

19. Die Gleichung 24) ist in den Parametern ϱ, σ, τ symmetrisch und quadratisch, wie es ja von vornherein zu erwarten war. Setzt man $\varrho=\sigma$, so heißt das, daß eine zwei-zweideutige Verwandtschaft mit sich selbst zusammengesetzt wird, also eine

Iteration der Verwandtschaft stattfindet. Hierbei ergibt sich nur eine einzige Möglichkeit, indem die beiden Tangenten an den Kegelschnitt mit dem Parameter $\varrho = \sigma$ stets eine negative Ecke bilden (eine positive Ecke ist ja hier ausgeschlossen). Die Gleichung 24b) besteht auch noch für $\varrho = \sigma$ zu Recht und folglich auch die Gleichung 24). Diese wird aber im vorliegenden Fall linear in τ, wie es sein muß, da die quadratischen Glieder sich wegheben. Aus 24b) und 23) folgt ferner die Relation:

$$A_\varrho^2 : B_\varrho^2 : C_\varrho^2 = (a - \tau) : (b - \tau) : (c - \tau), \tag{25}$$

die ebenfalls die verlangte Beziehung darstellt.

Will man die Kegelschnitte φ finden[1]), denen man Dreiecke umschreiben kann, die f eingeschrieben sind, so hat man $\varrho = \sigma = \tau$ zu setzen; auch hier verliert die Gleichung 24b) ihre Bedeutung nicht und die Gleichung 24) geht über in:

$$\begin{aligned} \varrho^4 - \tfrac{4}{3}\varrho^3(a + b + c) + 2\varrho^2(ab + bc + ca) - 4\varrho\, abc \\ + \tfrac{1}{3}(abc(a + b + c) - (ab + bc + ca)^2) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Die gleiche Beziehung muß sich ergeben, wenn man $\tau = \varrho$ in 25) einsetzt. Es geht aber: $A_\varrho^2 : (a - \varrho) = B_\varrho^2 : (b - \varrho)$ nach 21) über in:

$$A_\varrho^2(B_\varrho + C_\varrho) - B_\varrho^2(C_\varrho + A_\varrho) = 0;$$

diese Gleichung ist abgesehen von dem Faktor $(A_\varrho - B_\varrho)$ identisch mit:

$$B_\varrho C_\varrho + C_\varrho A_\varrho + A_\varrho B_\varrho = 0. \tag{26a}$$

Diese Beziehung muß mit der bekannten Bedingung übereinstimmen, die aussagt, daß man: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ein Dreieck einbeschreiben kann, das zugleich Polardreieck von: $A_\varrho x^2 + B_\varrho y^2 + C_\varrho z^2 = 0$ ist. Das ist aber der Fall, wenn:

$$\frac{1}{A_\varrho} + \frac{1}{B_\varrho} + \frac{1}{C_\varrho} = 0$$

ist, was mit Rücksicht auf 25) sich auch in der Form:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{a - \varrho}} + \frac{1}{\sqrt{b - \varrho}} + \frac{1}{\sqrt{c - \varrho}} = 0, \text{ oder} \\ &(a - \varrho)^2 (b - \varrho)^2 + (b - \varrho)^2 (c - \varrho)^2 + (c - \varrho)^2 (a - \varrho)^2 - \\ &\quad - 2(a - \varrho)(b - \varrho)(c - \varrho)[a - \varrho + b - \varrho + c - \varrho] = 0 \end{aligned} \right. \tag{26b}$$

schreiben läßt.

---

1) Vgl. Cayley an der in der Einleitung zitierten Stelle.

Will man den Kegelschnitt φ so bestimmen, daß man ihm unendlich viele *Vierecke* umschreiben kann, die zugleich f eingeschrieben sind, so müssen sich ihre Diagonalen in einer Ecke des gemeinsamen Polardreiecks von f und φ schneiden Wir haben demnach hier $\varrho = \sigma$ zu setzen und zugleich $\tau = a$ oder $\tau = b$ oder $\tau = c$. Noch 25) folgt somit, daß der Parameter ϱ von φ einer der drei quadratischen Gleichungen: $A_\varrho = 0$, $B_\varrho = 0$, $C_\varrho = 0$ genügen muß. Für die betreffenden sechs Kegelschnitte φ gilt also die Gleichung:

$$A_\varrho B_\varrho C_\varrho = 0. \tag{27}$$

20. Damit sich einem Kegelschnitte φ unendlich viele Dreiecke bzw. Vierecke umschreiben lassen, die zugleich dem Kegelschnitt f einbeschrieben sind, muß, wie wir soeben sahen, sein Parameter ϱ der Gleichung 26a) bzw. 27) Genüge leisten. *Es soll uns nun weiterhin die Frage nach der Parametergleichung eines Kegelschnittes φ in dem allgemeinen Falle beschäftigen, wo unendlich viele dem Kegelschnitte f eingeschriebene und zugleich φ umschriebene n-Ecke existieren.* Diese Gleichung wollen wir kurz als die *Bedingungsgleichung für das n-Eck* bezeichnen; ihre Wurzeln sind die Parameter solcher Kegelschnitte φ, denen man n-Ecke der verlangten Art umschreiben kann.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet die Gleichung 24). Aus ihrer Form 24b) erkennen wir unmittelbar, daß sie völlig ungeändert bleibt, wenn man die Größen $a, b, c, \varrho, \sigma, \tau$ alle um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert. Wir ersetzen diese Größen durch $(a-\varrho)$, $(b-\varrho)$, $(c-\varrho)$, 0, $(\sigma-\varrho)$, $(\tau-\varrho)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}[(\sigma-\varrho)(\tau-\varrho)-(a-\varrho)(b-\varrho)-(b-\varrho)(c-\varrho)-(c-\varrho)(a-\varrho)]^2 \\ +4(a-\varrho)(b-\varrho)(c-\varrho)[\sigma-\varrho+\tau-\varrho-(a-\varrho+b-\varrho+c-\varrho)]=0.\end{aligned} \tag{28}$$

Für die weiteren Rechnungen empfiehlt es sich die folgenden Abkürzungen einzuführen:

$$\begin{cases}(A_\varrho+B_\varrho+C_\varrho)(a-\varrho)(b-\varrho)(c-\varrho)=\varsigma_1, \\ (A_\varrho B_\varrho+B_\varrho C_\varrho+C_\varrho A_\varrho)(a-\varrho)^2(b-\varrho)^2(c-\varrho)^2=\varsigma_2, \\ A_\varrho B_\varrho C_\varrho(a-\varrho)^3(b-\varrho)^3(c-\varrho)^3=\varsigma_3, \\ 4(a-\varrho)(b-\varrho)(c-\varrho)=\vartheta_2;\end{cases} \tag{29}$$

sie sind gemäß 21) verknüpft durch die Relation:

$$\vartheta_2^2 = 2(\varsigma_1\varsigma_2-\varsigma_3). \tag{30}$$

Dadurch geht jene Gleichung über in:

$$[(\sigma-\varrho)(\tau-\varrho)-\varsigma_1]^2+\vartheta_2(\sigma-\varrho+\tau-\varrho)-\varsigma_1^2-\varsigma_2=0, \text{ oder}$$

$$31)\quad (\sigma-\varrho)^2(\tau-\varrho)^2-2\varsigma_1(\sigma-\varrho)(\tau-\varrho)+\vartheta_2(\sigma-\varrho+\tau-\varrho)-\varsigma_2=0.$$

Liegen O, S, T, P auf dem Kegelschnitt f, und berührt OS den Kegelschnitt mit dem Parameter σ, so mögen die beiden Tangenten aus S an den Kegelschnitt φ (mit dem Parameter ϱ) die Sehnen SP und ST sein. Dann berühren die Sehnen OP und OT zwei Kegelschnitte des Büschels mit den Parametern π und τ respektive. Diese Parameter sind Wurzeln der voranstehenden Gleichung, in der σ als gegeben angesehen wird. Demnach gelten für diese beiden Wurzeln die Relationen:

$$32)\quad \begin{cases}(\sigma-\varrho)^2(\pi-\varrho+\tau-\varrho)-2\varsigma_1(\sigma-\varrho)+\vartheta_2=0,\\ (\sigma-\varrho)^2(\pi-\varrho)(\tau-\varrho)-\vartheta_2(\sigma-\varrho)+\varsigma_2=0.\end{cases}$$

Wir wählen nun auf dem Kegelschnitt f die Punktreihe 0, 1, 2, 3, 4, ... derart, daß die Sehnen 0 1, 1 2, 2 3, 3 4, ... den Kegelschnitt φ mit dem Parameter ϱ berühren. Dann berührt auch jede der Sehnen 0 2, 0 3, 0 4, ... einen ganz bestimmten Kegelschnitt φ_2, φ_3, φ_4, ... des Büschels, deren Parameter σ_2, σ_3, σ_4, ... sein mögen. An und für sich gibt es ja immer zwei Kegelschnitte in dem Büschel $\varphi-\varkappa f=0$, die eine Sehne $0i$ berühren; aber nur der eine von ihnen bleibt fest, wenn der Tangentenzug 0 1 2 3 4... an φ, dessen Ecken auf f liegen müssen, variiert wird. Nach 32) gelten hier die Relationen:

$$33)\quad \begin{cases}(\sigma_i-\varrho)^2(\sigma_{i-1}-\varrho+\sigma_{i+1}-\varrho)-2\varsigma_1(\sigma_i-\varrho)+\vartheta_2=0,\\ (\sigma_{i-1}-\varrho)(\sigma_i-\varrho)^2(\sigma_{i+1}-\varrho)-\vartheta_2(\sigma_i-\varrho)+\varsigma_2=0,\end{cases}$$

wobei $i=2, 3, 4, \ldots$ zu setzen ist.

Die letztere Relation stellt aber eine bequeme Rekursionsformel zur Berechnung von σ_{i+1} dar, wenn σ_{i-1} und σ_i bekannt sind. Wir werden alsbald auf diese für unser Problem fundamentale Relation zurückkommen, vorher müssen wir jedoch Erwägungen ganz anderer Art anstellen. Doch seien hier anschließend noch die Werte von $(\sigma_2-\varrho)$, $(\sigma_3-\varrho)$, $(\sigma_4-\varrho)$ angegeben. Da $\sigma_1=\varrho$ ist, folgt sofort:

$$34)\quad \begin{cases}\sigma_2-\varrho=\dfrac{\varsigma_2}{\vartheta_2},\\ \sigma_3-\varrho=(2\varsigma_1\varsigma_2-\vartheta_2^2)\dfrac{\vartheta_2}{\varsigma_2^2}=\dfrac{2\varsigma_3\vartheta_2}{\varsigma_2^2},\\ \sigma_4-\varrho=(-\varsigma_2^3+4\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3-4\varsigma_3^2)\dfrac{\varsigma_2}{4\varsigma_3^2\vartheta_2}.\end{cases}$$

Die Größen ς_1, ς_2, ς_3 und ϑ_2 sind ganze rationale Funktionen in ϱ vom zweiten, vierten, sechsten und dritten Grade; sie sind zugleich in den Ausdrücken $(a - \varrho)$, $(b - \varrho)$, $(c - \varrho)$ homogen vom zweiten, vierten, sechsten und dritten Grade. Ferner sind die Größen $\sigma_2 - \varrho$, $\sigma_3 - \varrho$, $\sigma_4 - \varrho$, wie ihre obigen Werte unmittelbar zeigen, gebrochene rationale Funktionen in ϱ vom *ersten* Grad, und zwar sind ihre Zähler in den Ausdrücken $(a - \varrho)$, $(b - \varrho)$, $(c - \varrho)$ homogen vom vierten, neunten und sechzehnten Grade, während die Grade ihrer Nenner um eine Einheit niedriger sind. Die Gleichungen 33) zeigen, daß alle Größen $(\sigma_i - \varrho)$ gebrochene rationale Funktionen *ersten* Grades in ϱ sind; ihre Zähler und Nenner sind homogen in den Ausdrücken $(a - \varrho)$, $(b - \varrho)$, $(c - \varrho)$.

21. Was bedeutet nun das Verschwinden und was das Unendlichwerden der Funktion $(\sigma_n - \varrho)$? Wird $\sigma_n = \varrho$, so fällt der diesem Parameter entsprechende Kegelschnitt φ_n mit dem Kegelschnitt φ zusammen, dessen Parameter ϱ ist. D. h. die Sehne $0n$ ist eine Tangente von φ; mit anderen Worten $0n$ ist Seite eines f eingeschriebenen und φ umgeschriebenen $(n+1)$-Ecks oder $(n-1)$-Ecks. Dabei sind auch diejenigen $(n+1)$-Ecke und $(n-1)$-Ecke mitzurechnen, die in ein mehrfach zu zählendes geschlossenes Polygon von kleinerer Eckenzahl ausarten. Man hat also alle Polygone mitzuzählen, deren Eckenzahl ein ganzzahliger Teiler von $(n+1)$ oder von $(n-1)$ ist. Ist n gerade, so haben $(n+1)$ und $(n-1)$ keinen gemeinsamen Teiler; es kommen also außer $(n+1)$ und $(n-1)$ selbst sämtliche Teiler von $(n+1)$ und sämtliche Teiler von $(n-1)$ in Betracht. Ist dagegen n ungerade, so besitzen $(n+1)$ und $(n-1)$ den gemeinsamen Teiler 2. Es kommen also auch hier sämtliche Teiler der einen und sämtliche Teiler der anderen Zahl in Betracht nur mit dem Unterschiede, daß der Teiler 2 nur einmal zu nehmen ist. Der Teiler 2 spielt also eine besondere Rolle. *Das Verschwinden des Zählers von $(\sigma_n - \varrho)$ stellt mithin die Bedingungsgleichung für ein wirkliches oder ausgeartetes $(n-1)$-Eck oder $(n+1)$-Eck dar.* Wir bezeichnen die Bedingungsgleichung für ein wirkliches oder ausgeartetes $(n-1)$-Eck mit $\Theta_{n-1}(\varrho) = 0$ und diejenige für ein wirkliches oder ausgeartetes $(n+1)$-Eck mit $\Theta_{n+1}(\varrho) = 0$, wobei wir jedoch ausdrücklich festsetzen, daß die Zweiecke als Ausartungen des $(n+1)$-Ecks oder des $(n-1)$-Ecks auszulassen sind. *Alsdann wird der Zähler der Funktion $(\sigma_n - \varrho)$ entweder $\Theta_{n-1}(\varrho) \cdot \Theta_{n+1}(\varrho)$ oder $\Theta_{n-1}(\varrho) \cdot \Theta_{n+1}(\varrho) \cdot \vartheta_2(\varrho)$, je nachdem $(n \pm 1)$ eine ungerade oder gerade Zahl ist.* Dabei stellt nach

29) $\vartheta_2(\varrho) = 0$ die Bedingung für ein Zweieck dar. Die ganzen Funktionen $\Theta_{n-1}(\varrho)$ und $\Theta_{n+1}(\varrho)$ zerfallen selbst wieder in eine Anzahl rationaler Faktoren entsprechend den ganzzahligen Teilern der Zahlen $(n-1)$ und $(n+1)$ (abgesehen vom Teiler 2). Diese Faktoren müssen auch rational in den Größen $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ sein, denn sie treten bei den betreffenden Zahlen selbst gemäß ihrer Definitionsgleichung als rationale Funktionen auf.

Die Funktion $(\sigma_n - \varrho)$ wird unendlich von der ersten Ordnung für $\varrho = \infty$, außerdem überall, wo ihr Nenner verschwindet. σ_n nimmt also in den Nullstellen des Nenners von $(\sigma_n - \varrho)$ den Wert unendlich an, d. h. der zu dem Parameter σ_n gehörige Kegelschnitt φ_n fällt mit dem Kegelschnitt f zusammen; mit anderen Worten die Sehne $0n$ wird zur Tangente von f, der Punkt n konizidiert mit dem Punkt 0. *Das Verschwinden des Nenners von $(\sigma_n - \varrho)$ führt mithin zu einem wirklichen oder ausgearteten n-Eck.* Bezeichnet man wie vorher die Bedingungsgleichung für ein wirkliches oder ausgeartetes n-Eck mit $\Theta_n(\varrho) = 0$, wobei wieder das Zweieck als Ausartung auszuschließen ist, so muß für die Wurzeln dieser Gleichung immer auch der Nenner von $(\sigma_n - \varrho)$ verschwinden und umgekehrt. Natürlich muß dieser Nenner bei geradem n auch für $\vartheta_2(\varrho) = 0$ verschwinden.

Aus den Werten von $(\sigma_2 - \varrho)$, $(\sigma_3 - \varrho)$, $(\sigma_4 - \varrho)$ ersehen wir, daß:

$$35)\quad \begin{cases} \Theta_3 \equiv \varsigma_2 = 0 \text{ die Bedingung für das Dreieck,} \\ \Theta_4 \equiv 2\varsigma_3 = 0 \text{ die Bedingung für das Viereck,} \\ \Theta_5 \equiv (-\varsigma_2^3 + 4\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3 - 4\varsigma_3^2) = 0 \text{ die Bedingung für das Fünfeck} \end{cases}$$

ist. Mit Anwendung unserer neuen Bezeichnung kommt:

$$36)\quad \begin{cases} (\sigma_2 - \varrho) = \dfrac{\Theta_3}{\vartheta_2}, \\ (\sigma_3 - \varrho) = \dfrac{\vartheta_2\Theta_4}{\Theta_3^2}, \\ (\sigma_4 - \varrho) = \dfrac{\Theta_3\Theta_5}{\vartheta_2\Theta_4^2}. \end{cases}$$

Es wird also hier der Nenner der Funktionen gleich $\Theta_n^2(\varrho)$ bzw. $\Theta_n^2(\varrho)\vartheta_2$ je nachdem n ungerade oder gerade ist; ganz ebenso verhält es sich im allgemeinen Fall. Man hat sich das so vorzustellen, daß der Punkt n auf f sowohl von der einen wie von der anderen

Seite in den Punkt o hereinrücken kann; bei dem Zweieck fällt dies jedoch weg, da der bezügliche Kegelschnitt ein Geradenpaar, seine Tangente also ein Strahl durch seinen Scheitel ist. In der Tat lehrt die Gleichung 33):

$$(\sigma_i - \varrho) = \frac{\vartheta_2 - \varsigma_2 : (\sigma_i - \varrho)}{(\sigma_{i-1} - \varrho)(\sigma_{i+1} - \varrho)},$$

daß $(\sigma_i - \varrho)$ nur dort unendlich wird, wo $(\sigma_{i-1} - \varrho)$ oder $(\sigma_{i+1} - \varrho)$ verschwindet. Es ist aber nach dem vorher Gesagten $\Theta_{i-2} \cdot \Theta_i^2 \cdot \Theta_{i+2}$ bzw. $\vartheta_2^2\, \Theta_{i-2} \cdot \Theta_i^2 \cdot \Theta_{i+2}$ der Zähler von $(\sigma_{i-1} - \varrho)(\sigma_{i+1} - \varrho)$, je nachdem i ungerade oder gerade ist. In den Nullstellen von Θ_{i-2} und Θ_{i+2} kann aber $(\sigma_i - \varrho)$ gemäß seiner dargelegten Bedeutung nicht unendlich werden. Bei ungeradem i wird also $(\sigma_i - \varrho)$ unendlich vom *zweiten* Grade in den Nullstellen von Θ_i. Bei geradem i wird $(\sigma_i - \varrho)$ ebenfalls vom *zweiten* Grade unendlich in den Nullstellen von Θ_i, außerdem aber vom *ersten* Grade unendlich in den Nullstellen von ϑ_2. Denn alsdann tritt im Nenner von $\sigma_i - \varrho$ der Faktor ϑ_2 auf, so daß: $\vartheta_2 - \varsigma_2 : (\sigma_i - \varrho)$ den Faktor ϑ_2 und: $(\sigma_{i-1} - \varrho)(\sigma_{i+1} - \varrho)$ den Faktor ϑ_2^2 erhält. Hiermit ist nachgewiesen, daß allgemein:

$$37)\quad \begin{cases} (\sigma_i - \varrho) = \dfrac{\Theta_{i-1} \cdot \Theta_{i+1}}{\vartheta_2\, \Theta_i^2} & \text{für jede } \textit{gerade} \text{ Zahl } i \\[2ex] (\sigma_i - \varrho) = \dfrac{\vartheta_2\, \Theta_{i-1} \cdot \Theta_{i+1}}{\Theta_i^2} & \text{für je } \textit{ungerade} \text{ Zahl } i \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Gleichungen 33) gehen dabei für *gerades* i über in:

$$38\text{a})\quad \begin{cases} \Theta_{i-2}\, \Theta_{i+1}^2 + \Theta_{i-1}^2\, \Theta_{i+2} - 2\varsigma_1\, \Theta_{i-1}\, \Theta_i\, \Theta_{i+1} + \vartheta_2^2\, \Theta_i^3 = 0, \\ \Theta_{i-2}\, \Theta_{i+2} - \Theta_{i-1}\, \Theta_{i+1} + \varsigma_2\, \Theta_i^2 = 0, \end{cases}$$

dagegen für *ungerades* i über in:

$$38\text{b})\quad \begin{cases} \Theta_{i-2}\, \Theta_{i+1}^2 + \Theta_{i-1}^2\, \Theta_{i+2} - 2\varsigma_1\, \Theta_{i-1}\, \Theta_i\, \Theta_{i+1} + \Theta_i^3 = 0, \\ \Theta_{i-2}\, \Theta_{i+2} - \vartheta_2^2\, \Theta_{i-1}\, \Theta_{i+1} + \varsigma_2\, \Theta_i^2 = 0. \end{cases}$$

22. Zunächst ermöglichen uns diese Gleichungen den Grad der ganzen rationalen Funktionen Θ_i zu ermitteln. Ist D_i dieser Grad, so gibt es genau D_i Kegelschnitte φ, denen man teils wirkliche teils ausgeartete i-Ecke einbeschreiben kann, die zugleich f umschrieben sind. Hierbei ist wieder die Ausartung in Zweiecke nicht mit inbegriffen. Die zweite Gleichung 38a) und die zweite

Gleichung 38b) geben durch Vergleich der Grade des ersten und letzten Gliedes übereinstimmend für *gerades* und *ungerades* i:

$$39)\qquad D_{i+2} - 2D_i + D_{i-2} = 4.$$

Bildet man aber von der Zahlenreihe ... D_{i+4}, D_{i+2}, D_i, D_{i-2}, D_{i-4}, ... die erste und dann die zweite Differenzenreihe, so ist der Wert der Glieder dieser letzteren nach unserer Relation konstant, nämlich gleich 4. Bekanntlich werden jedoch die Glieder der zweiten Differenzenreihe der Zahlenreihe $F(2)$, $F(4)$, $F(6)$, ... oder: $F'(1)$, $F'(3)$, $F'(5)$, ... nur dann einander gleich, wenn F bzw. F' ganze Funktionen 2. Grades der Zahl i sind. Demnach hat man: $D_i = A + B_i + C_i^2$ für geradzahliges i und $D_i = A' + B'i + C'i^2$ für ungeradzahliges i. Aus der obigen Relation folgt noch weiter $C = C' = \frac{1}{2}$. Nach 35) sind die Werte $D_2 = 0$, $D_3 = 4$, $D_4 = 6$, $D_5 = 12$; mit ihrer Hilfe findet man: $B = 0$, $A = -2$, bzw. $B' = 0$, $A' = -\frac{1}{2}$, so daß;

$$40)\qquad \left\{ D_i = \frac{i^2}{2} - 2 \quad \text{oder } D_i = \frac{i^2}{2} - \frac{1}{2}\right.$$

wird, je nachdem i *gerade* oder *ungerade* ist.

In dem Kegelschnittbüschel: $\varphi - \varkappa f = 0$ *gibt es also* $D_i = \frac{i^2}{2} - 2$ *oder* $D_i = \frac{i^2}{2} - \frac{1}{2}$ *Kegelschnitte derart, daß man ihnen entweder wirkliche oder ausgeartete i-Ecke umschreiben kann, die zugleich dem Kegelschnitt f eingeschrieben sind. Die erstere Zahl gilt für gerades, die letztere für ungerades i.* Dabei ist von den etwa auftretenden Zweiecken abgesehen.

23. Die Funktionen Θ_i sind ganz und rational in ϱ vom Grade D_i; sie sind insbesondere homogen, ganz, rational und symmetrisch in den Größen $(a - \varrho)$, $(b - \varrho)$, $(c - \varrho)$. Auch als Funktionen von ς_1, ς_2, ς_3 sind die Θ_i ganz und rational. Nun ist ς_1 vom zweiten, ς_2 vom vierten und ς_3 vom sechsten Grade in ϱ, also $\varsigma_1^\alpha \varsigma_2^\beta \varsigma_3^\gamma$ vom Grade: $(2\alpha + 4\beta + 6\gamma)$ in ϱ. Bezeichnet man wie gebräuchlich die Zahl $(\alpha + 2\beta + 3\gamma)$ als das *Gewicht* des Ausdruckes $\varsigma_1^\alpha \varsigma_2^\beta \varsigma_3^\gamma$, so kann man sagen: *Die Funktionen Θ_i sind ganze, rationale Funktionen von ς_1, ς_2, ς_3, deren sämtliche Glieder isobar vom Gewichte $\frac{1}{2} D_i$ sind.*

Die Rekursionsformeln:

$$38)\qquad \left| \begin{array}{l} \Theta_{i-2}\,\Theta_{i+2} \equiv \Theta_{i-1}\,\Theta_{i+1} - \varsigma_2\,\Theta_i^2 \text{ für gerades } i, \\ \Theta_{i-2}\,\Theta_{i+2} \equiv \Theta_2^2\,\Theta_{i-1}\,\Theta_{i+1} - \varsigma_2\,\Theta_i^2 \text{ für ungerades } i \end{array} \right.$$

dienen zur sukzessiven Berechnung der Θ_i; sie zeigen uns zugleich, daß:

$$(\Theta_{i-1}\,\Theta_{i+1} - \varsigma_2\,\Theta_i^2) : \Theta_{i-2} \text{ für gerades } i, \text{ und}$$

$$(\vartheta_2^2\,\Theta_{i-1}\,\Theta_{i+1} - \varsigma_2\,\Theta_i^2) : \Theta_{i-2} \text{ für ungerades } i$$

ganze rationale Funktionen sind. Es bestehen indessen noch eine Reihe weiterer Beziehungen zwischen den Funktionen Θ, zu denen wir in folgender Weise gelangen.

Wir betrachten die Funktionen: $(\sigma_k - \sigma_i)$, wobei wir annehmen, daß $k > i$ und beide Zahlen relativ prim zueinander sind. Soll unsere Funktion verschwinden, so gehört $\sigma_k = \sigma_i$ einem Kegelschnitt als Parameter zu, der zugleich die Sehnen $0i$ und $0k$ von f berührt. Dann müssen aber $0i$ und $0k$ Diagonalen eines $(k+i)$-Ecks oder eines $(k-i)$-Ecks sein. Die Nullstellen der Funktion $(\sigma_k - \sigma_i)$ müssen also übereinstimmen mit den Nullstellen von Θ_{k+i} und Θ_{k-i}; außerdem wird sie, falls $(k \pm i)$ gerade ist, auch noch in den Nullstellen von ϑ_2 verschwinden. Bilden wir die Differenz von $(\sigma_k - \varrho)$ und $(\sigma_i - \varrho)$ aus ihren Werten 37), so muß der Zähler der gebrochenen rationalen Funktion abgesehen von einem Zahlenfaktor A mit $\Theta_{k+i} \cdot \Theta_{k-i}$ übereinstimmen, wozu noch der Faktor ϑ_2 treten kann. Hieraus ergibt sich:

$$41)\quad \begin{cases} \Theta_{k-1}\,\Theta_{k+1}\,\Theta_i^2 - \Theta_{i-1}\,\Theta_{i+1}\,\Theta_k^2 \equiv A \cdot \Theta_{k+i}\,\Theta_{k-i}, \\ \qquad\qquad \text{wenn } i \equiv k \pmod 2 \\ \vartheta_2^2\,\Theta_{k-1}\,\Theta_{k+1}\,\Theta_i^2 - \Theta_{i-1}\,\Theta_{i+1}\,\Theta_k^2 \equiv A \cdot \Theta_{k+i}\,\Theta_{k-i}, \\ \qquad\qquad \text{wenn } k \equiv 1 \pmod 2 \text{ und} \\ \qquad\qquad i \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

Besitzen k und i einen gemeinsamen Teiler q, so läßt sich aus allen Gliedern dieser Relationen der gemeinsame Faktor Θ_q^2 abspalten. Bestimmt man nach 40) den Grad der einzelnen Funktionen Θ, so erkennt man, daß die Glieder einer jeden Relation von gleichem Grade sind, wie es sein muß.

Zu erwähnen ist hier noch, daß die Funktion Θ_i sich in einzelne Faktoren, die in ς_1, ς_2, ς_3 ganz, rational und isobar sind, zerlegen läßt, sobald i keine Primzahl ist. Bezeichnet man mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ die einzelnen Teiler der Zahl i, und ist hiermit die Gesamtheit ihrer Teiler (vom Teiler 2 abgesehen) erschöpft, so hat man eine Relation:

$$42)\qquad \Theta_i \equiv \vartheta_\alpha\,\vartheta_\beta\,\vartheta_\gamma \ldots \vartheta_\varepsilon.$$

Dabei stellt $\vartheta_\alpha(\varrho) = 0$ die Bedingungsgleichung für die wirklichen (nicht ausgearteten) α-Ecke dar; ebenso entspricht das Verschwinden von $\vartheta_\beta(\varrho)$ den wirklichen β-Ecken, usw.

24. Die Werte von Θ_3, Θ_4 und Θ_5 sind bereits unter 35) gegeben; wir wollen hier noch einige Funktionen[1] Θ_n hinzufügen, die sich mit Hilfe der Formeln 38) und 41) leicht gewinnen lassen. Dabei ist zu beachten, daß Θ_1 und Θ_2 gleich der Einheit sind. Man findet:

$$\Theta_6 = \Theta_3\,\Theta_5 - \varsigma_2\,\Theta_4^2 = \varsigma_2(-\varsigma_2^3 + 4\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3 - 8\varsigma_3^2) = \vartheta_3\,\vartheta_6.$$

$$\Theta_7 = \vartheta_2^2\,\vartheta_4\,\vartheta_6 - \vartheta_5^2$$
$$= (-\varsigma_2^6 + 4\varsigma_1\varsigma_2^4\varsigma_3 - 4\varsigma_2^3\varsigma_3^2 - 16\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3^3 + 16\varsigma_3^4) = \vartheta_7.$$

$$\Theta_8 = (\vartheta_6\,\vartheta_3^3 - \vartheta_5^2)\,\vartheta_4$$
$$= 2\varsigma_3\cdot 2(-\varsigma_2^6 + 8\varsigma_1\varsigma_2^4\varsigma_3 - 8\varsigma_2^3\varsigma_3^2 - 8\varsigma_1^2\varsigma_2^2\varsigma_3^2 + 16\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3^3 - 8\varsigma_3^4) = \vartheta_4\,\vartheta_8.$$

$$\Theta_9 = \vartheta_3(\vartheta_2^2\,\vartheta_4^3\,\vartheta_6 - \vartheta_5^3)$$
$$= \varsigma_2(\varsigma_2^9 - 12\varsigma_1\varsigma_2^7\varsigma_3 + 12\varsigma_2^6\varsigma_3^2 + 48\varsigma_1^2\varsigma_2^5\varsigma_3^2 - 112\varsigma_1\varsigma_2^4\varsigma_3^3 + 64\varsigma_2^3\varsigma_3^4$$
$$- 64\varsigma_1^3\varsigma_2^3\varsigma_3^3 + 256\varsigma_1^2\varsigma_2^2\varsigma_3^4 - 384\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3^5 + 192\varsigma_3^6) = \vartheta_3\,\vartheta_9.$$

$$\Theta_{10} = \vartheta_5(\vartheta_4^2\,\vartheta_7 - \vartheta_3^3\,\vartheta_6^2)$$
$$= \vartheta_5(-\varsigma_2^9 + 12\varsigma_1\varsigma_2^7\varsigma_3 - 20\varsigma_2^6\varsigma_3^2 - 32\varsigma_1^2\varsigma_2^5\varsigma_3^2 + 112\varsigma_1\varsigma_2^4\varsigma_3^3$$
$$- 80\varsigma_2^3\varsigma_3^4 - 64\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3^5 + 64\varsigma_3^6).$$

Die Formeln 38) 41) dienen auch dazu die ϑ mit höherem Index durch solche mit niederem Index auszudrücken. Dabei bestimmt sich der Zahlenkoeffizient A durch Vergleich der höchsten Potenzen von ς_2. Hier führe ich eine Reihe solcher Relationen an:

$$\vartheta_5 = \vartheta_2^2\,\vartheta_4 - \vartheta_3^3,$$
$$\vartheta_6 = \vartheta_5 - \vartheta_4^2,$$
$$\vartheta_7 = \vartheta_3^3\,\vartheta_5 - \vartheta_2^2\,\vartheta_4^3 = \vartheta_2^2\,\vartheta_4\,\vartheta_6 - \vartheta_5^2 = \vartheta_3^3\,\vartheta_6 - \vartheta_4^2\,\vartheta_5,$$
$$\vartheta_8 = \vartheta_3^3\,\vartheta_6 - \vartheta_5^2 = \vartheta_7 - \vartheta_5\,\vartheta_6,$$
$$\vartheta_9 = \vartheta_2^2\,\vartheta_4^3\,\vartheta_6 - \vartheta_5^3 = \vartheta_5\,\vartheta_7 - \vartheta_2^2\,\vartheta_4\,\vartheta_6^2 = \vartheta_5\,\vartheta_8 - \vartheta_6\,\vartheta_7,$$
$$\vartheta_{10} = \vartheta_4^2\,\vartheta_7 - \vartheta_3^3\,\vartheta_6^2 = \vartheta_9 - \vartheta_6\,\vartheta_8,$$
$$\vartheta_{11} = \vartheta_5^3\,\vartheta_7 - \vartheta_2^2\,\vartheta_3^3\,\vartheta_4\,\vartheta_6^3 = \vartheta_2^2\,\vartheta_4^3\,\vartheta_6\,\vartheta_8 - \vartheta_5\,\vartheta_7^2 = \vartheta_5^2\,\vartheta_{10} - \vartheta_6\,\vartheta_7\,\vartheta_8,$$
$$\vartheta_{12} = \tfrac{3}{2}(\vartheta_5^2\,\vartheta_8 - \vartheta_7^2),$$
$$\vartheta_{13} = \vartheta_2^2\,\vartheta_3^3\,\vartheta_4\,\vartheta_6^3\,\vartheta_8 - \vartheta_5\,\vartheta_7^3.$$

1) Man vergleiche die Funktionen ψ_n bei Halphen, Traité des fonctions ellipt. Bd. 1, p. 100.

Die Bedingungsgleichungen für das nicht ausgeartete Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, . . ., Dreizehneck sind hiernach: $\vartheta_5 = 0$, $\vartheta_6 = 0$, $\vartheta_7 = 0, \ldots, \vartheta_{13} = 0$.

Man kann mit Hilfe der Relationen 41) auch die Bedingungsgleichungen für höhere n-Ecke angeben. So wird die Bedingungsgleichung für das:

14-Eck: $\vartheta_3^3 \vartheta_6^2 \vartheta_9 - \vartheta_4^2 \vartheta_5 \vartheta_8^2 = 0$,

15-Eck: $\vartheta_2^2 \vartheta_4 \vartheta_6^2 \vartheta_8 \vartheta_{10} - \vartheta_7 \vartheta_9^2 = 0$,

16-Eck: $\vartheta_5 \vartheta_7^2 \vartheta_{10} - \vartheta_3^3 \vartheta_6 \vartheta_9^2 = 0$,

17-Eck: $\vartheta_2^2 \vartheta_4^3 \vartheta_5 \vartheta_8^3 \vartheta_{10} - \vartheta_3^3 \vartheta_7 \vartheta_9^3 = 0 = \vartheta_7^2 \vartheta_9 \vartheta_{11} - \vartheta_2^2 \vartheta_4 \vartheta_5^2 \vartheta_6 \vartheta_8 \vartheta_{10}^2$,

⋮

23-Eck: $\vartheta_{11}^3 \vartheta_{13} - \vartheta_2^2 \vartheta_3^3 \vartheta_4^3 \vartheta_5 \vartheta_6^3 \vartheta_{10} \vartheta_{12}^3 = 0$.

Noch mögen hier ein paar Worte über den Grad der einzelnen Funktionen ϑ_i angefügt werden. Die Gamtheit aller n-Ecke, sowohl der wirklichen wie der ausgearteten, war $D_n = \frac{n^2}{2} - 2$, bzw. $D_n = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; doch waren hierbei die Zweiecke nicht berücksichtigt. Nimmt man auch noch die Zweiecke hinzu, so ist die Gesamtheit aller n-Ecke durch: $D(n) = \frac{n^2}{2} + 1$, bzw. $D(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}$ gegeben. Ohne auf den allgemeinsten Fall einzugehen, der etwas umständlich in der Darstellung wird, will ich annehmen, daß: $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ sei, wo p, q, r Primzahlfaktoren bedeuten. Bezeichnen wir noch mit $d(n)$ den Grad von ϑ_n, so setzt sich $d(n)$ in folgender Weise aus den $D(i)$ zusammen. Es ist $d(n) = D(n) - \sum d(i)$, wo für i alle Teiler von n zu setzen sind. Weiter ist: $d(n) = D(n) - D(p^{\alpha-1} q^\beta r^\gamma) - D(p^\alpha q^{\beta-1} r^\gamma) - D(p^\alpha q^\beta r^{\gamma-1}) + \sum d(i) + \sum d(k) + \sum d(l) - \sum d(m)$, wo für i alle Teiler von $p^\alpha q^{\beta-1} r^{\gamma-1}$ für k alle Teiler von $p^{\alpha-1} q^\beta r^{\gamma-1}$ für l alle Teiler von $p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^\gamma$ und für m alle Teiler von $p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1}$ zu setzen sind, diese Zahlen selbst mit einbegriffen. Endlich wird der Grad der Bedingungsgleichung für die nicht ausgearteten n-Ecke:

$$43)\left\{\begin{aligned} d(n) = D(n) &- D(p^{\alpha-1} q^\beta r^\gamma) - D(p^\alpha q^{\beta-1} r^\gamma) - D(p^\alpha q^\beta r^{\gamma-1}) \\ &+ D(p^\alpha q^{\beta-1} r^{\gamma-1}) + D(p^{\alpha-1} q^\beta r^{\gamma-1}) \\ &+ D(p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^\gamma) - D(p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1}). \end{aligned}\right.$$

25. Zum Schluß noch einige Worte zur Behandlung des Problems mittels elliptischer Funktionen. Die zwei-zweideutige Verwandtschaft:

$$\varkappa^2\lambda^2 - p(\varkappa^2 + \lambda^2) + 2q\varkappa\lambda + 1 = 0$$

führt zu der Differentialgleichung:

$$\frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^4 - k\varkappa^2 + 1}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^4 - k\lambda^2 + 1}}.$$

Die gleiche Differentialgleichung besteht auch für die weiteren Verwandtschaften; denn für p, q, p_1, q_1, p_2, q_2, usw. gilt ja die Beziehung 10a). Nimmt man die Differentialgleichung zwischen λ und μ hinzu, so folgt eine ebensolche Gleichung auch für $\varkappa$ und μ. Hieraus kann dann geschlossen werden, daß auch zwischen $\varkappa$ und μ eine zwei-zweideutige Verwandtschaft besteht. Geht man zu den Integralen über, so ergeben sich für die Verwandtschaften die Relationen: $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} \pm \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \pm \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ die bez. Integrale und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmte die Verwandtschaften charakterisierende Konstanten sind. Durch Zusammensetzen ergeben sich die beiden zwei-zweideutigen Verwandtschaften: $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \pm (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \pm (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$. Hieraus lassen sich dann wieder die früher entwickelten Resultate und Sätze ableiten.

Druckfertig erklärt 18. IV. 1908.]

SITZUNG VOM 24. FEBRUAR 1908.

Zur Theorie der Gelenksysteme II.

Von

MARTIN KRAUSE.

In einer Arbeit gleichen Titels[1]) ist gezeigt worden, wie durch geeignete Fragestellung mit Hülfe der elliptischen Funktionen eine Anzahl von übergeschlossenen Gelenkmechanismen in systematischer Weise abgeleitet werden kann. Solcher Fragestellungen wird es beliebig viele geben können. Wir wollen aus ihnen eine weitere herausgreifen, die mit der vorhin angedeuteten in engem Zusammenhang steht, aber eine besondere Betrachtung notwendig macht. Sie entsteht aus der ersteren, wenn die Punkte A, B, C, D in die entsprechenden Seiten des Gelenkvierecks M, N, P, Q hineinfallen und die Eckpunkte des zweiten Gelenkvierecks M_1, N_1, P_1, Q_1 alle in einen Punkt zusammenfallen.

§ 1.

Normierung des zu behandelnden Problems. Reduktion desselben auf die Untersuchung dreier quadratischer Gleichungen, deren Koeffizienten doppelt periodische Funktionen sind.

Nach dem in der Einleitung bemerkten normieren wir das Problem folgendermaßen. Gegeben ein Gelenkviereck mit den Seiten:

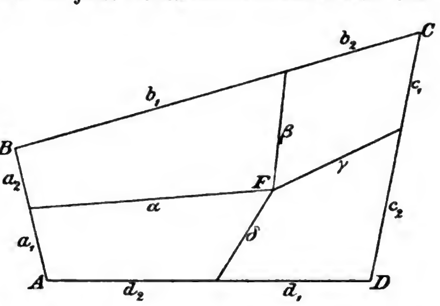
$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d,$$

wobei dieselben in dem durch die Reihenfolge der Buchstaben angedeuteten Sinne zu durchlaufen sind. Ferner ist ein Punkt F gegeben und mit je einem Punkte der genannten vier Seiten fest verbunden. Die Verbindungslinien bezeichnen wir durch α, β, γ, δ, wobei diese Linien in der Richtung von ihrem jedesmaligen Schnittpunkt mit den Seiten des Gelenkvierecks zum Punkte F hin zu durchlaufen sind. Die auf den Seiten des Gelenkvierecks abgeschnittenen

1) Siehe diese Berichte. Juli 1907.

Stücke bezeichnen wir durch a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 und geben diesen Linien dieselben Richtungen wie den entsprechenden Seiten a, b, c, d. Es wird dann im allgemeinen ein starres System entstehen. *Wir fragen, wann dasselbe ein einfach unendlich veränderliches werden kann, so zwar, daß bei festgehaltenem AD und bei festen Werten der Größen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ einfach unendlich viele Lagen des Systems möglich sind.*

Es ist nun klar, daß das ursprüngliche Gelenkviereck A, B, C, D bei den angegebenen Konstruktionen in vier Gelenkvierecke zerfällt und wird daher die Aufgabe darauf herauskommen, zu untersuchen, wann diese vier Gelenkvierecke bei unendlich vielen Lagen zusammenbestehen können. Für ein jedes Gelenkviereck bestehen zwei Gleichungen, die man erhält, wenn man die Seiten desselben auf zwei aufeinander senkrecht stehende gerade Linien projiziert und die Summe der Projektionen gleich Null setzt. Wir wollen diese beiden Gleichungen für ein jedes der vier Gelenkvierecke wirklich aufstellen.



Dazu nennen wir die Winkel, welche die Seiten a, b, c, d mit einer beliebigen Geraden bilden, φ_1', φ_2', φ_3', φ_4', die Winkel, welche die Seiten α, β, γ, δ mit derselben Geraden bilden, ψ_1', ψ_2', ψ_3', ψ_4', setzen ferner:

$$e^{i\varphi_\varepsilon'} = t_\varepsilon', \tag{1}$$

$$e^{i\psi_\varepsilon'} = u_\varepsilon' \quad \text{für} \quad \varepsilon: 1, 2, 3, 4, \tag{2}$$

so lauten vier der acht Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} a_2 t_1' + b_1 t_2' + \beta u_2' - \alpha u_1' &= 0, \\ b_2 t_2' + c_1 t_3' + \gamma u_3' - \beta u_2' &= 0, \\ c_2 t_3' + d_1 t_4' + \delta u_4' - \gamma u_3' &= 0, \\ d_2 t_4' + a_1 t_1' + \alpha u_1' - \delta u_4' &= 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

während die anderen vier aus ihnen entstehen, wenn wir an Stelle der Größen t_ε' und u_ε' die reziproken Größen einsetzen.

Die ersten vier Gleichungen dividieren wir durch t'_4, setzen ferner:

$$\frac{t'_\varepsilon}{t'_4} = t_\varepsilon, \tag{4}$$

$$\frac{u'_\varepsilon}{t'_4} = u_\varepsilon, \tag{5}$$

so können wir dieselben schreiben:

$$\beta u_2 = \alpha u_1 - a_2 t_1 - b_1 t_2, \tag{6}$$

$$\gamma u_3 = \alpha u_1 + a_1 t_1 + c_2 t_3 + d, \tag{7}$$

$$\delta u_4 = \alpha u_1 + a_1 t_1 + d_2, \tag{8}$$

$$a t_1 + b t_2 + c t_3 + d = 0. \tag{9}$$

Die letzten vier Gleichungen können in die Form gebracht werden:

$$\frac{\beta}{u_2} = \frac{\alpha}{u_1} - \frac{a_2}{t_1} - \frac{b_1}{t_2}, \tag{10}$$

$$\frac{\gamma}{u_3} = \frac{\alpha}{u_1} + \frac{a_1}{t_1} + \frac{c_2}{t_3} + d, \tag{11}$$

$$\frac{\delta}{u_4} = \frac{\alpha}{u_1} + \frac{a_1}{t_1} + d_2, \tag{12}$$

$$\frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0. \tag{13}$$

Es fragt sich, wann diese acht Gleichungen für unendlich viele Werte der Größen u und t zusammenbestehen können.

Durch Multiplikation der rechten und der linken Seiten der Gleichungen (6), (7), (8) mit denen der Gleichungen (10), (11), (12) erhalten wir die Gleichungen:

$$\alpha u_1 \mathfrak{T}_1 + \frac{\alpha}{u_1} T_1 = \delta^2 - \alpha^2 - \mathfrak{T}_1 T_1, \tag{14}$$

$$\alpha u_1 \mathfrak{T}_2 + \frac{\alpha}{u_1} T_2 = \gamma^2 - \alpha^2 - \mathfrak{T}_2 T_2, \tag{15}$$

$$\alpha u_1 \mathfrak{T}_3 + \frac{\alpha}{u_1} T_3 = \alpha^2 - \beta^2 + \mathfrak{T}_3 T_3, \tag{16}$$

wobei gesetzt ist:

$$T_1 = a_1 t_1 + d_2, \qquad \mathfrak{T}_1 = \frac{a_1}{t_1} + d_2,$$

$$T_2 = a_1 t_1 + c_2 t_3 + d, \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{a_1}{t_1} + \frac{c_2}{t_3} + d,$$

$$T_3 = a_2 t_1 + b_1 t_2, \qquad \mathfrak{T}_3 = \frac{a_2}{t_1} + \frac{b_1}{t_2}.$$

Wir können diese Gleichungen an Stelle der Gleichungen (10), (11), (12) in Betracht ziehen. Von den Gleichungen (6), (7), (8) können wir zunächst auch völlig absehen, da dieselben lediglich die Werte u_2, u_3, u_4 liefern, wenn die Größen t und die Größe u_1 gegeben ist. Mit anderen Worten das Problem kommt auf das folgende heraus: Wann können die Gleichungen (9), (13), (14), (15), (16) mit den vier Unbekannten t_1, t_2, t_3, u_1 für unendlich viele Werte derselben zusammenbestehen?

Wir wollen zunächst die beiden Gleichungen betrachten:

$$at_1 + bt_2 + ct_3 + d = 0,$$

$$\frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0.$$

Aus ihnen folgt, daß die drei Größen t_1, t_2, t_3 sich als doppeltperiodische Funktionen eines Parameters darstellen lassen und zwar wird:

$$(17)\qquad \begin{aligned} t_s &= (\mathrm{dn}\,\theta_s + \mathrm{dn}\,\mu_s)^2 : \varkappa^2 N_s, \\ N_s &= \mathrm{sn}^2\theta_s - \mathrm{sn}^2\mu_s. \end{aligned}$$

Dabei sind die Größen μ_s Konstanten, die sich durch die gegebenen Seiten des Gelenkvierecks a, b, c, d darstellen lassen, ebenso wie der Modul $\varkappa^2$. Die Größen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sind veränderlich und zwar bestehen zwischen ihnen die Beziehungen:

$$(18)\qquad \theta_1 - \theta_2 = \mu_3, \quad \theta_2 - \theta_3 = \mu_1, \quad \theta_3 - \theta_1 = \mu_2.$$

Es bleibt also nur eine von ihnen willkürlich. Wir wählen die Größe θ_1.

Machen wir von diesen Darstellungen Gebrauch, so bleiben lediglich die Gleichungen (14), (15), (16) zu betrachten übrig. Es sind das drei quadratische Gleichungen mit derselben Unbekannten u_1, deren Koeffizienten doppeltperiodische Funktionen von θ_1 sind. Die Aufgabe lautet nunmehr:

Es sollen die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür aufgestellt werden, daß diese drei Gleichungen für unendlich viele Werte von θ_1 zusammenbestehen können.

§ 2.

Lösung des gestellten Problems.

Die nächstliegende Art in der Behandlung des gestellten Problems bestände in der Bildung der Resultante je zweier der drei quadratischen Gleichungen. Jede der drei Resultanten müßte iden-

tisch verschwinden. Die Durchführung dieses Gedankens führt zu einigermaßen komplizierten Untersuchungen. Einfacher kommt man auf dem folgenden Wege zum Ziel. Jedenfalls ist u_1 eine doppeltperiodische Funktion von θ_1. Die möglichen endlichen Unendlichkeitspunkte, die alle Pole sind, können leicht angegeben werden. Es sind das entweder diejenigen Stellen, für welche der Koeffizient von u_1^2 gleich Null wird, oder aber die Unendlichkeitspunkte der anderen Koeffizienten. Als solche kommen für uns die drei Stellen in Betracht:

$$\theta_1 = \mu_1, \quad \theta_1 = -\mu_1, \quad \theta_1 = \mu_3 - \mu_2 = \mu_4.$$

Soweit dieselben Unendlichkeitsstellen der Koeffizienten sind, sind es Pole erster Ordnung. Es folgt dann unmittelbar, daß u_1 für diese Werte höchstens von der ersten Ordnung unendlich groß werden kann.

Unter solchen Umständen sind acht und nur acht Fälle möglich. Wir können setzen:

$$u_1 = \frac{e_{-1}}{\theta_1 - \mu_1} + e_0 + e_1(\theta_1 - \mu_1) + \cdots$$

$$u_1 = \frac{f_{-1}}{\theta_1 + \mu_1} + f_0 + f_1(\theta_1 + \mu_1) + \cdots$$

$$u_1 = \frac{g_{-1}}{\theta_1 - \mu_4} + g_0 + g_1(\theta_1 - \mu_4) + \cdots$$

Dann sind wie in der früheren Arbeit die acht Fälle zu unterscheiden:

1) die drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sind von Null verschieden,
2) „ „ „ „ „ „ gleich Null,
3) eine der drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} ist gleich Null, die beiden andern von Null verschieden,
4) zwei der drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sind gleich Null, die dritte von Null verschieden.

Um die Betrachtung dieser acht Fälle handelt es sich.

Hierbei wollen wir von vornherein alle speziellen Annahmen über die Größen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausschließen, insbesondere die Fälle, in denen eine oder mehrere derselben der Null gleich sind.

Es werden dann unsere Resultate nur im allgemeinen richtig sein.

Die Art der Betrachtung geht nun dahin.

Wir entwickeln die rechten und die linken Seiten unserer drei Gleichungen (14), (15), (16) um die drei Punkte $\mu_1, -\mu_1, \mu_4$. Es müssen sich identische Gleichungen ergeben, indessen können wir uns auf die Koeffizienten der ersten negativen Potenz und auf die konstanten Glieder beschränken.

Nehmen wir zunächst den Punkt $\theta_1 = \mu$, und setzen die Entwicklung an:

$$u_1 = \frac{e_{-1}}{\theta_1 - \mu_1} + e_0 + \cdots \tag{1}$$

so ergibt sich durch Vergleichung der Koeffizienten von $(\theta_1 - \mu_1)^{-1}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha e_{-1} &= -\frac{a_1}{2ad}\sqrt{q} \\ \alpha e_{-1} d &= \left(\frac{c_2}{c} - \frac{a_1}{a}\right)\frac{\sqrt{q}}{2} \\ \alpha e_{-1} &= \frac{a_2}{2ad}\sqrt{q}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Diese drei Gleichungen können aber im allgemeinen *nicht* zusammenbestehen. Wir sind daher berechtigt, e_{-1} der Null gleich zu setzen, so daß sich die Zahl der möglichen Fälle auf *vier* beschränkt. Dabei folgt leicht, daß e_0 von Null verschieden sein muß, da sonst $1:u_1$ in dem betrachteten Punkte unendlich groß würde, was nicht angänglich ist.

Unter solchen Umständen bleibt als einzig möglicher Ansatz für den Punkt $\theta_1 = \mu_1$ der Ansatz:

$$u_1 = e_0 + e_1(\theta_1 - \mu_1) + \cdots \tag{3}$$

wobei e_0 von Null verschieden ist.

Vergleichen wir die Koeffizienten von $(\theta_1 - \mu_1)^{-1}$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{e_0} &= -d_2\,, \\ \frac{\alpha}{e_0}\left(\frac{a_1}{a} - \frac{c_2}{c}\right) &= -d\left(\frac{a_1}{a} - \frac{c_2}{c}\right), \\ \frac{\alpha}{e_0} &= -\frac{b_1 d}{b}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus folgen die Beziehungen:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_2}{c}\,; \quad \frac{b_1}{b} = \frac{d_2}{d} \tag{5}$$

oder also wir erhalten den folgenden

Lehrsatz: Bei allen Mechanismen der angegebenen Art müssen die Beziehungen bestehen:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_2}{c}\,, \quad \frac{b_1}{b} = \frac{d_2}{d}\,.$$

Durch Vergleichung der konstanten Glieder ergibt sich der weitere

Lehrsatz: Bei allen Mechanismen der angegebenen Art müssen die Beziehungen stattfinden:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} ad(\alpha^2 d_1 + \gamma^2 d_2) &= d_1 d_2 (b^2 a_1 + d^2 a_2), \\ ad(\beta^2 a_1 + \delta^2 a_2) &= a_1 a_2 (a^2 d_1 + c^2 d_2). \end{aligned}$$

Damit ist der eine Unendlichkeitspunkt erledigt.

Wir nehmen jetzt den Punkt $\theta_1 = -\mu_1$.

Es sind zwei Fälle möglich. Im ersten wird:

$$\text{(7)} \qquad u_1 = \frac{f_{-1}}{\theta_1 + \mu_1} + f_0 + \cdots$$

Die Vergleichung der Reste gibt lediglich die Gleichung:

$$\alpha f_{-1} = \frac{a_1}{2ad}\sqrt{q},$$

die Vergleichung der konstanten Glieder führt zu dem

Lehrsatz: Wenn in der Entwickelung um den Punkt $\theta_1 = -\mu_1$ der Rest von Null verschieden ist, so treten zu den bisherigen Beziehungen die folgenden hinzu:

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \alpha^2 a d_1 - \beta^2 a_1 d &= a_1 d_1 (b b_1 - a a_2), \\ \gamma^2 a d_2 - \delta^2 a_2 d &= a_2 d_2 (d d_1 - c c_2). \end{aligned}$$

Wir wollen, ehe wir den zweiten Fall nehmen, den dritten Punkt $\theta_1 = \mu_4$ in Betracht ziehen.

Auch hier ergeben sich zwei Fälle.

Im ersten wird:

$$\text{(9)} \qquad u_1 = \frac{g_{-1}}{\theta_1 - \mu_4} + g_0 + \cdots.$$

Es ergeben sich dann zunächst die Gleichungen:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} \frac{a_1}{a} &= \frac{d_2}{d}, \\ \alpha g_{-1} &= -\frac{c_2}{2cd}\sqrt{q}, \\ \alpha g_{-1} &= -\frac{b_1}{2bd}\sqrt{q} \end{aligned}$$

oder also wir erhalten den folgenden

Lehrsatz: Wenn bei der Entwickelung um den Punkt $\theta_1 = \mu_4$ der Rest von Null verschieden ist, so treten zu den bisherigen die Beziehungen hinzu:

$$\text{(11)} \qquad \frac{d_2}{d} = \frac{a_1}{a}, \quad \frac{c_2}{c} = \frac{b_1}{b}.$$

Die Vergleichung der konstanten Glieder führt zu dem folgenden

Lehrsatz: Für den im letzten Lehrsatz angegebenen Fall bestehen unter Berücksichtigung der bisher aufgestellten die weiteren Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} a^2(\alpha^2 - \delta^2) &= a_1^2(b^2 - c^2), \\ a^2(\beta^2 - \gamma^2) &= a_2^2(a^2 - d^2). \end{aligned}$$

Damit sind wir im wesentlichen fertig. Es zeigt sich, daß aus den entwickelten Beziehungen die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmt werden können und zwar ergeben sich die Werte:

$$\alpha^2 = b_1^2, \quad \beta^2 = a_2^2, \quad \gamma^2 = d_1^2, \quad \delta^2 = c_2^2,$$

oder wenn wir die positiven Werte wählen:

$$(13)\qquad \alpha = b_1, \quad \beta = a_2, \quad \gamma = d_1, \quad \delta = c_2.$$

Es zeigt sich, daß falls die hiermit entwickelten Konstantenbeziehungen bestehen, die drei quadratischen Gleichungen für denselben Wert von u_1 erfüllt werden können und zwar für den Wert:

$$(14)\qquad u_1 = t_2.$$

Die Werte von u_2, u_3, u_4 folgen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta u_2 &= \alpha u_1 - a_2 t_1 - b_1 t_2, \\ \gamma u_3 &= \alpha u_1 + a_1 t_1 + c_2 t_3 + d, \\ \delta u_4 &= \alpha u_1 + a_1 t_1 + d_2 \end{aligned}$$

und zwar wird:

$$(15)\qquad u_2 = -t_1, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = -t_3.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

Lehrsatz: Es ergibt sich ein erstes bewegliches Gelenksystem, wenn die Relationen bestehen:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_2}{c} = \frac{b_1}{b} = \frac{d_2}{d}$$

$$\alpha = b_1, \quad \beta = a_2, \quad \gamma = d_1, \quad \delta = c_2.$$

In jedem Augenblick finden die Winkelbeziehungen statt:

$$u_1 = t_2, \quad u_2 = -t_1, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = -t_3.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes kann auch unmittelbar auf elementar geometrischem Wege nachgewiesen werden.

Wir wollen noch bei dem dritten Unendlichkeitspunkt bleiben und die Entwickelung zu Grunde legen:

$$(16)\qquad u_1 = g_0 + g_1(\theta_1 - \mu_4) + \cdots,$$

wobei g_0 von Null verschieden ist.

Die Vergleichung der Reste gibt keine neuen Beziehungen, die Vergleichung der konstanten Glieder führt zu dem

Lehrsatz: Wenn bei der Entwickelung um den Punkt $\theta_1 = \mu_4$ der Rest gleich Null ist, so treten zu den Beziehungen, die sich bei der Entwickelung um die Punkte $\theta_1 = \pm \mu_1$ ergeben haben, die weiteren hinzu:

$$(17) \quad \begin{aligned} \alpha^2 a d_1 - \delta^2 a_2 d &= d_1 a_2(-a a_1 + d d_2) \\ \beta^2 b c_2 - \gamma^2 b_1 c &= b_1 c_2(-b b_2 + c c_1). \end{aligned}$$

Die sechs Beziehungen, die wir hiermit für die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gefunden haben, sind wie vorauszusehen, nicht alle voneinander unabhängig und erlauben eine Bestimmung derselben. Die Resultate lauten:

$$(18) \quad \begin{aligned} a^2 d d_1 \alpha^2 &= a_1 a_2 d d_2 c^2 - O, \\ a^2 d d_2 \gamma^2 &= a_1 a_2 d d_1 a^2 - O, \\ d^2 a a_1 \beta^2 &= a a_2 d_1 d_2 d^2 + O, \\ d^2 a a_2 \delta^2 &= a a_1 d_1 d_2 b^2 + O, \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$(19) \quad O = \tfrac{1}{2}(a_1 a_2 d(a^2 d_1 + c^2 d_2) - d_1 d_2 a(b^2 a_1 + d^2 a_2)).$$

Wir haben hiermit diejenigen Werte von θ_1 untersucht, für welche die Größen t unendlich groß werden und dabei einen Unendlichkeitspunkt von u_1 gefunden. u_1 muß aber mindestens noch einen zweiten derartigen Punkt besitzen. Hierbei kommen lediglich diejenigen Stellen in Betracht, für welche die Koeffizienten von u_1^2 in den drei quadratischen Gleichungen (14), (15), (16) des vorigen Paragraphen der Null gleich werden oder also für welche die Gleichungen bestehen:

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{a_1}{t_1} + d_2 &= 0, \\ \frac{a_1}{t_1} + \frac{c_2}{t_3} + d &= 0, \\ \frac{a_2}{t_1} + \frac{b_1}{t_2} &= 0. \end{aligned}$$

An Stelle der zweiten können wir unter Benützung der schon gefundenen Konstantenbeziehungen die Gleichung setzen:

$$(21) \quad \frac{a_1 b}{t_2} - d a_2 = 0.$$

Neben diesen Gleichungen muß aber die weitere bestehen:

$$a d\left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) + b d\left(t_2 + \frac{1}{t_2}\right) + a b\left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1}\right) + a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 0,$$

die sich unmittelbar aus den Gleichungen (9) und (13) des ersten Paragraphen ergibt.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß diesen vier Gleichungen dann und nur dann Genüge geleistet wird, wenn die Beziehung besteht:

$$(22) \qquad O = 0$$

oder also die Größen $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ die Werte annehmen:

$$(23) \quad \alpha^2 = c_1 c_2 \frac{b_1}{b_2}; \quad \beta^2 = d_1 d_2 \frac{a_2}{a_1}; \quad \gamma^2 = a_1 a_2 \frac{b_2}{b_1}; \quad \delta^2 = b_1 b_2 \frac{a_1}{a_2}.$$

Damit sind die Konstantenbeziehungen, welche sich aus der Betrachtung der Unendlichkeitspunkte von u_1 ergeben, gefunden und es fragt sich, ob nunmehr die drei quadratischen Gleichungen des vorigen Paragraphen zusammenbestehen können und für welche Werte von u_1. Man kann auf mehrfachem Wege vorgehen. Wir wählen den folgenden.

Da die Unendlichkeitspunkte von u_1 bekannt sind und auch die in Betracht kommenden Entwickelungskoeffizienten leicht zu bestimmen sind, so kann ein Ausdruck für u_1 aufgefaßt als rationale Funktion der Größen t_1, t_2, t_3 leicht hingeschrieben werden. Hierbei ist eine gewisse Formenmannigfaltigkeit möglich, da ja die Größen t_1, t_2, t_3 nicht unabhängig voneinander sind.

Es ergeben sich für u_1 u. a. die Darstellungen:

$$(24) \quad \begin{array}{ll} \dfrac{t_1(a_2 d - a_1 b t_2)}{a(\gamma t_3 - \alpha t_1)}, & \dfrac{a t_1\left(\dfrac{\gamma}{t_3} - \dfrac{\alpha}{t_1}\right)}{\left(a_2 d - \dfrac{a_1 b}{t_2}\right)} \\[2ex] -\dfrac{b_2 \alpha t_2 (a_1 t_1 + d_2)}{b_1 c_2 (b_2 t_3 + c_1 t_2)}, & -\dfrac{b_1 c_2 t_2\left(\dfrac{b_2}{t_3} + \dfrac{c_1}{t_2}\right)}{b_2 \alpha\left(\dfrac{a_1}{t_1} + d_2\right)}. \end{array}$$

Die Werte für $1 : u_1$ ergeben sich hieraus, wenn an Stelle von

$$t_1, \ t_2, \ t_3$$

gesetzt wird resp.

$$1 : t_1, \ 1 : t_2, \ 1 : t_3.$$

Eine einfache Rechnung lehrt, daß diese Werte, wie ja auch aus allgemeinen Gesichtspunkten zu schließen ist in der Tat den drei mehrfach genannten quadratischen Gleichungen Genüge leisten.

Die Werte von u_2, u_3, u_4 ergeben sich ähnlich wie in dem vorhin behandelten Falle und zwar wird:

$$u_2 = -t_3 u_1, \quad u_3 = \frac{t_3}{t_1} u_1, \quad u_4 = -\frac{t_3}{t_2} u_1. \tag{25}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

Lehrsatz: Es ergibt sich ein weiteres bewegliches Gelenksystem, wenn die Konstantenbeziehungen bestehen:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_2}{c}; \quad \frac{b_1}{b} = \frac{d_2}{d},$$

$$a_1 a_2 d(a^2 d_1 + c^2 d_2) = d_1 d_2 a(b^2 a_1 + d^2 a_2),$$

$$\alpha^2 = c_1 c_2 \frac{b_1}{b_2}; \quad \beta^2 = d_1 d_2 \frac{a_2}{a_1}; \quad \gamma^2 = a_1 a_2 \frac{b_2}{b_1}; \quad \delta^2 = b_1 b_2 \frac{a_1}{a_2}.$$

In jedem Augenblick finden die Winkelbeziehungen statt:

$$u_2 = -t_3 u_1, \quad u_3 = \frac{t_3}{t_1} u_1, \quad u_4 = -\frac{t_3}{t_2} u_1.$$

u_1 nimmt einen der Werte (24) an.

Wir sind hiermit zu einem Mechanismus gekommen, den zuerst Herr BURMESTER im Jahre 1893 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik in eingehender Weise untersucht hat. Herr BURMESTER bezeichnet ihn mit dem Namen eines Brennpunktmechanismus und hat eine große Anzahl von Eigenschaften desselben in eingehender geometrischer Weise entwickelt, von deren Aufstellung wir füglich absehen können.

Wir gehen nunmehr zu dem Punkte:

$$\theta_1 = -\mu_1$$

zurück, wobei wir annehmen, daß die Konstantenbeziehungen bestehen, die wir bei der Entwickelung um den Punkt $\theta_1 = \mu_1$ gefunden haben.

Als zweiten möglichen Ansatz haben wir gefunden:

$$u_1 = f_0 + f_1(\theta_1 + \mu_1) + \cdots \tag{26}$$

Die Vergleichung der Reste führt zu den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{f_0} &= -d_2, \\ \frac{\alpha}{f_0} &= -\frac{d c_1}{c}, \\ \frac{\alpha}{f_0}\left(-\frac{a_2}{a} + \frac{b_1}{b}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus diesen Gleichungen sowie aus der Vergleichung der konstanten Glieder ergibt sich der folgende

Lehrsatz: Wenn bei der Entwickelung von u_1 um den Punkt:

$$\theta_1 = -\mu_1$$

herum das Restglied verschwindet, so müssen die Beziehungen stattfinden:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \frac{a_1}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c} = \frac{d_1}{d}, \\ a^2(\alpha^2 - \beta^2) = a_2^2(d^2 - c^2), \\ a^2(\delta^2 - \gamma^2) = a_1^2(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Bei dem Punkte:

$$\theta_1 = \mu_4$$

sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden, wie schon ausgeführt worden ist. Wir nehmen zunächst den Fall:

$$(29)\qquad u_1 = \frac{g_{-1}}{\theta_1 - \mu_4} + g_0 + \cdots$$

und verweisen in bezug auf denselben auf die früher entwickelten Beziehungen. Es ergeben sich dann aus den aufgestellten Konstantenrelationen die Darstellungen:

$$a_1 = a_2 = \frac{a}{2}; \quad b_1 = b_2 = \frac{b}{2}; \quad c_1 = c_2 = \frac{c}{2}; \quad d_1 = d_2 = \frac{d}{2},$$

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 &= \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 + d^2), \\ 2\beta^2 &= \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - d^2), \\ 2\gamma^2 &= \tfrac{1}{4}(-a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \\ 2\delta^2 &= \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Wir können jetzt wie bei dem Brennpunktsmechanismus schließen. Zu dem betrachteten Unendlichkeitspunkt von u_1 muß mindestens noch ein weiterer hinzukommen und zwar ein solcher, für welchen die Koeffizienten von u_1^2 in den mehrfach genannten drei Gleichungen der Null gleich werden. Hieraus folgt, daß die Beziehung bestehen muß:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

oder also, daß die Diagonalen im Viereck A, B, C, D aufeinander senkrecht stehen müssen. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Es ergibt sich ein drittes bewegliches Gelenksystem, wenn die Diagonalen des Vierecks A, B, C, D aufeinander senkrecht stehen, die Seiten desselben halbiert werden und die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich den entsprechenden halben Vierecksseiten sind.

Die Richtigkeit des Lehrsatzes kann auch aus elementaren Betrachtungen erschlossen werden.

Es bleibt nun noch ein Fall zu erörtern übrig, in welchem die Entwickelungen um die Unendlichkeitspunkte von t_4 herum die Form haben:

$$(30)\qquad \begin{aligned} u_1 &= e_0 + e_1(\theta_1 - \mu_1) + \cdots \\ u_1 &= f_0 + f_1(\theta_1 + \mu_1) + \cdots \\ u_1 &= g_0 + g_1(\theta_1 - \mu_4) + \cdots. \end{aligned}$$

Die Behandlung dieses Falles ist so ähnlich der Behandlung des ersten Falles, daß wir uns füglich darauf beschränken können, den folgenden Lehrsatz auszusprechen

Lehrsatz: Es ergibt sich ein viertes bewegliches Gelenksystem, wenn die Relationen bestehen:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_2}{c} = \frac{b_2}{b} = \frac{d_1}{d}$$

$$\alpha = d_2, \quad \beta = c_1, \quad \gamma = b_2, \quad \delta = a_1.$$

In jedem Augenblick finden die Winkelbeziehungen statt:

$$u_1 = -1, \quad u_2 = t_3, \quad u_3 = -t_2, \quad u_4 = t_1.$$

Dieser Fall ist die notwendige Ergänzung des ersten und kann auch seinerseits auf völlig elementarem Wege als zu Recht bestehend erkannt werden.

Damit sind wir am Ziele.

Druckfertig erklärt 25. IV. 1908.]

INHALT.

Seite

C. Neumann, Einige Äußerungen C. G. J. Jacobis über die Prinzipien der analytischen Mechanik 80

S. Garten, Der durch den konstanten Strom im Nerven des Kaltfrosches ausgelöste Erregungsvorgang ist diskontinuierlicher Natur. Mit einer Tafel 85

Karl Rohn, Das Schließungsproblem von Poncelet und eine gewisse Erweiterung. 94

Martin Krause, Zur Theorie der Gelenksysteme II. Mit 1 Textfigur 132

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

IV.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1908.

Einzelpreis 1 Mark.

SITZUNG VOM 15. JUNI 1908.

1. Herr FISCHER trägt vor über eine für die Abhandlungen bestimmte Untersuchung „Über das LISTINGsche Gesetz".
   Herr ROHN übergibt für die Berichte eine Arbeit von H. LIEBMANN „Über die Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes" und eine Arbeit von FRANZ MEYER (Königsberg) „Über die Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen der Invarianten".
2. Die Klasse beschließt, Herrn LUTHER in Dresden zum ordentlichen Mitglied zu präsentieren.
3. Der Sekretär berichtet, daß durch zahlreiche Anmeldungen von Arbeiten die Fertigstellung eines Festbandes aus Anlaß des 500-jährigen Jubiläums der Universität gesichert ist.
4. Geschäftliche Mitteilungen (Bericht von Herrn HALLWACHS über die Kartellkonferenz in Berlin, Einladungen und Tauschanträge).

Über die Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes.

Von

HEINRICH LIEBMANN.

Für die mathematische Physik sind die beiden folgenden Sätze wichtig:

1. *Es seien X, Y, Z gegebene (differenzierbare) Funktionen von x, y, z und es sei*

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

dann gibt es eine (nicht eindeutig bestimmte) *Funktion V, mit deren Hilfe X, Y, Z sich so ausdrücken lassen*

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

2. *Erfüllen dagegen X, Y, Z die Bedingung*

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

so existieren drei Funktionen $L(x, y, z)$, $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, *von solcher Beschaffenheit, daß*

$$X = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Was den Beweis des ersten Satzes anbetrifft, so kann man für V einfach das Linienintegral nehmen

$$V = \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

welches dann von einem festen Punkte x_0, y_0, z_0 zum Punkte x, y, z hin längs einer beliebigen Kurve erstreckt werden kann; natürlich darf die Kurve den Raum nicht verlassen, innerhalb dessen die drei Bedingungen gelten; man kann aber auch V als NEWTONsches

Potential einer gewissen Raumbelegung darstellen, je nachdem mit Hinzunahme des NEWTONschen Potentials einer gewissen Flächenbelegung — d. h. als dreifaches Integral, zu dem unter Umständen noch ein zweifaches Integral hinzutritt.

Was den zweiten Satz betrifft, so scheinen in der Literatur die Funktionen L, M, N bisher nur als Raumintegrale dargestellt worden zu sein[1]), und es verdient wohl, hervorgehoben zu werden, daß L, M, N auch *als einfache Integrale* dargestellt werden können.

Da die Ableitung durchaus auf dem Wege der Vektoranalysis gefunden ist, so wird sie im folgenden auch in dieser Weise dargestellt, nur das Resultat soll (am Ende von § 1) noch einmal in der gewöhnlichen Form ausgesprochen werden, auch das einfache *Beispiel* darin durchgerechnet werden.

Demnach lautet die Aufgabe so:

Gegeben ist ein quellenfreies Vektorfeld

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}X + \mathfrak{j}X + \mathfrak{k}Z, \quad \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0.$$

Es ist nachzuweisen, daß

$$\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\mathfrak{B}$$

ist; $\mathfrak{B}$ ist als e i n f a c h e s *Integral darzustellen.*

Wir werden für $\mathfrak{B}$ ein vektorielles Linienintegral finden, längs des Strahles von einem festen Punkt $x_0 y_0 z_0$ zum Punkte x, y, z erstreckt. In einem besonders einfachen Fall werden wir $\mathfrak{B}$ wirklich ausrechnen und zeigen, daß $\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ ist. (§ 1.)

Die Funktion $\mathfrak{B}$ kann natürlich auch dann aufgestellt werden, wenn das Vektorfeld $\mathfrak{A}$ nicht quellenfrei ist; bilden wir in diesem Falle $\operatorname{curl}\mathfrak{B}$, so wird sich nicht $\mathfrak{A}$ ergeben, sondern es wird ein Zusatzglied auftreten, das zu Null werden muß, wenn $\operatorname{div}\mathfrak{A} =$ Null

1) K. NEUMANN, Beiträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik. Leipzig 1893. Kap. 8, § 8: Über die elektrodynamische Konstruierbarkeit willkürlich gegebener Funktionen. — Der Satz auf Seite 234 spricht das Ergebnis aus.

Ferner:

K. NEUMANN. Die MAXWELL-HERTZsche Theorie II. Abhandlungen der K. Sächs. G. d. W. XXVII, 1902, Seite 788, Formel 27.

RIEMANN-WEBER, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I. Braunschweig 1900, Seite 224—25.

ABRAHAM-FÖPPL. Theorie der Elektrizität I. Leipzig 1904, Seite 98—103.

GIBBS-WILSON, Vektoranalysis, 2. Aufl. London 1907, p. 234.

ist Ist dies gezeigt, so ist damit zugleich die Formel in § 1 allgemein bestätigt (§ 3). — Über die Differentialquotienten eines längs einer Geraden erstreckten Integrals nach den Koordinaten des Endpunkts sind zu diesem Zweck einige Betrachtungen vorauszuschicken (§ 2). — In § 4 wird dann der Vollständigkeit halber die erste Aufgabe, die Konstruktion der Funktion V in derselben Weise behandelt, wie die zweite Aufgabe in § 3.

§ 1. Bestimmung des Vektors $\mathfrak{B}$ (x, y, z), dessen curl gleich $\mathfrak{A}$ ist.

Von dem Vektor

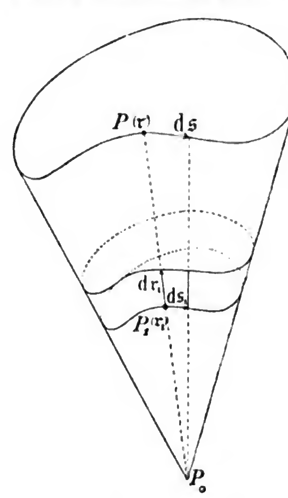
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}X + \mathfrak{j}Y + \mathfrak{k}Z$$

wird vorausgesetzt: es ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Gesucht wird eine Funktion, ein Vektor $\mathfrak{B}$ derart, daß für jede beliebige geschlossene Kurve s die Beziehung besteht

$$\int \mathfrak{A} d\mathfrak{f} = \int \mathfrak{B} d\mathfrak{s},$$



wobei das erste Integral über alle Elemente einer beliebigen Flächenkalotte mit dem Rande s zu erstrecken ist, das zweite längs des Randes ($d\mathfrak{f}$ stellt in bekannter Weise das Flächenelement vektoriell dar und hat die Richtung der Normale in dem betreffenden Punkt, $d\mathfrak{s}$ ist das Randelement vektoriell).

Ist nämlich $\mathfrak{B}$ gefunden, so wird bekanntlich nach der Umkehrung des STOKESschen Satzes[1])

$$\mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{B}.$$

Zu einer derartigen Funktion $\mathfrak{B}$ gelangen wir durch die folgende Betrachtung (siehe Figur):

s sei die geschlossene Kurve, P_0 ein beliebiger, bestimmt gewählter Punkt im Raum. Wir ziehen von P_0 die Strahlen (Vektoren $\mathfrak{r}$, Länge r) nach den Punkten P von s.

---

1) ABRAHAM FÖPPL, a. a. O. Seite 93.

P_1 sei ein Punkt auf P_0P, zwischen P_0 und P, $\mathfrak{r}_1$ sei der Vektor P_0P_1, r_1 seine Länge.

Sodann betrachten wir die geschlossene Fläche, bestehend aus dem von den Strahlen $\mathfrak{r}$ gebildeten Kegelmantel und einer beliebigen Flächenkalotte mit dem Rande s, einem „Deckel". Wegen der Voraussetzung

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$$

ist dann nach dem Gaussschen Satze[1])

$$\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} = 0,$$

wobei über die ganze geschlossene Fläche zu integrieren ist. Hierfür können wir aber schreiben

$$\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} = \int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f}_1$$

und dabei ist das erste Integral über den „Deckel" zu erstrecken und der Flächenvektor in Richtung der *äußeren* Normale zu nehmen, das zweite aber über den Kegelmantel, dabei ist aber die *innere* Normale als Richtung von $d\mathfrak{f}_1$ zu nehmen.

Dieses zweite Integral werden wir jetzt in ein Linienintegral

$$\int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{s}$$

längs der Randkurve s verwandeln.

Wir zerlegen den Kegelmantel in Elemente $d\mathfrak{f}_1$, die einerseits begrenzt sind von den Mantellinien, andererseits von Kurven, welche zum Rande s ähnlich und ähnlich gelegen sind, mit dem Ähnlichkeitszentrum P_0. Bezeichnen wir ein Element dieser Kurve mit $d\mathfrak{s}_1$, so ist

$$d\mathfrak{s}_1 = \frac{r_1}{r}\, d\mathfrak{s},$$

wobei $d\mathfrak{s}$ das von denselben unendlich benachbarten Mantellinien wie $d\mathfrak{s}_1$ begrenzte Element der Randkurve ist.

Dann wird

$$d\mathfrak{f}_1 = [d\mathfrak{r}_1, d\mathfrak{s}_1] = [d\mathfrak{r}_1, d\mathfrak{s}]\,\frac{r_1}{r}.$$

Weil aber

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{\mathfrak{r}}{r}\, r_1, \quad \left(d\mathfrak{r}_1 = \frac{\mathfrak{r}}{r}\, dr_1\right)$$

---

1) a. a. O. Seite 56, Gleichung 71.

so kann hierfür noch geschrieben werden

$$d\mathfrak{f}_1 = \frac{dr_1 \cdot r_1}{r^2}\,[\mathfrak{r}, d\mathfrak{s}]$$

und es wird

$$\mathfrak{A} d\mathfrak{f}_1 = \frac{\mathfrak{A} d r_1 \cdot r_1}{r^2}\,[\mathfrak{r}, d\mathfrak{s}]$$

$$= -\frac{d\mathfrak{s} \cdot r_1}{r^2}\,[\mathfrak{r}, \mathfrak{A}],$$

$$\int \mathfrak{A} d\mathfrak{f}_1 = \int d\mathfrak{s}\,\mathfrak{B},$$

wobei

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r r_1 \mathfrak{A} d r_1\right].$$

Wir schliessen hieraus:

Ist $\mathfrak{A}$ ein quellenfreier Vektor, so wird

$$\mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{B},$$

wobei

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r r_1 \mathfrak{A} d r_1\right] = \frac{1}{r}\int_0^r r_1 [\mathfrak{A}, d\mathfrak{r}_1].$$

Dieses Integral ist zu erstrecken längs des Strahles von P_0 bis P.

Um das Resultat in gewöhnlicher Weise auszudrücken: Wir haben erschlossen, daß unter der Voraussetzung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

die Gleichungen bestehen

$$X = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{usw.}$$

wobei

$$L = -\frac{1}{r^2}\left\{(y - y_0)\int_0^r r_1 Z d r_1 - (z - z_0)\int_0^r r_1 Y d r_1\right\}$$

ist usw.

Daß unser Ergebnis richtig ist, werden wir in § 3 erkennen. an dieser Stelle möge ein einfaches Beispiel genügen.

Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{k}$,

also $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$ das gegebene Vektorfeld; dann ist doch die Voraussetzung erfüllt,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

und es wird

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r r_1 \mathfrak{k}\, d r_1\right]$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \mathfrak{k}\frac{r^2}{2}\right] = -\frac{1}{2}[\mathfrak{r}, \mathfrak{k}]$$

$$= \frac{1}{2}(-\mathfrak{i}(y - y_0) + \mathfrak{j}(x - x_0)).$$

Die gewöhnliche Rechnungsart würde liefern:

$$L = -\frac{1}{r^2}(y - y_0)\int_0^r r_1\, d r_1 = -\frac{1}{2}(y - y_0)$$

$$M = +\frac{1}{r^2}(x - x_0)\int_0^r r_1\, d r_1 = \frac{1}{2}(x - x_0)$$

$$N = 0.$$

Also kommt in der Tat

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = X$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = Y$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = Z.$$

Zusatz: Es ist nicht ohne Interesse, auf unser einfaches Bei spiel, nämlich das Vektorfeld

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 1 \quad (\text{oder } \mathfrak{A} = \mathfrak{k})$$

die in der Literatur angegebene Darstellung anzuwenden.

Für ein *endliches* Gebiet, etwa das Innere einer Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist, reißt diese Darstellung den Vektor in zwei Bestandteile auseinander, was mit dem bekannten Umstand zusammenhängt, daß die durch die Darstellung gegebene Zerlegung in einem endlichen Gebiet nicht die einzig mögliche ist; es sind verschiedene Zerlegungen möglich.[1])

Man hat nach Neumann (vgl. das erste Zitat oben S. 177) so zu verfahren:

Man hat die (Kugel)Fläche zu belegen mit einer Flächendichtigkeit

$$s = (\mathfrak{n}, \mathfrak{A})$$

1) a. a. O. S. 99.

wo $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der inneren Normale bedeutet; man hat sie ferner zu belegen mit

$$\mathfrak{u} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{A}],$$

und den Innenraum mit

$$\sigma = \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

sowie mit

$$\mathfrak{h} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Dann bildet man das skalare Potential

$$S_1(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{s\,d\omega}{r} + \int \frac{\sigma\,d\tau}{r},$$

und das Vektorpotential

$$\mathfrak{S}_1(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\mathfrak{u}\,d\omega}{r} + \int \frac{\mathfrak{h}\,d\tau}{r}$$

Jedes dieser beiden Potentiale zerfällt also in ein Flächenintegral, das über alle Elemente $d\omega$ der Kugeloberfläche zu erstrecken ist, und ein Raumintegral, das über den Innenraum der Kugel zu erstrecken ist.

Dann wird für Punkte innerhalb der Fläche:

$$4\pi \mathfrak{A}(x_1, y_1, z_1) = -\nabla S_1 + \operatorname{curl} \mathfrak{S}_1.$$

In unserm Fall verschwinden die beiden Raumintegrale, wegen

$$\sigma = \operatorname{div} \mathfrak{k} = 0$$

$$\mathfrak{h} = \operatorname{curl} \mathfrak{k} = 0,$$

die beiden Flächenintegrale lassen sich durch Kugelfunktionen mit zwei Argumenten berechnen, und es kommt für Punkte im Innern:

$$S_1(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{s\,d\omega}{r} = -\frac{4\pi}{3} z_1$$

$$\mathfrak{S}_1(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\mathfrak{h}\,d\omega}{r} = \frac{4\pi}{3}(-i y_1 + j x_1),$$

d. h.

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla S_1 = \frac{1}{3} \cdot \mathfrak{k}$$

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{S}_1 = \frac{2}{3} \mathfrak{k}.$$

Der Vektor $\mathfrak{k}$ ist also in zwei Bestandteile zerlegt, die erst zusammen wieder seinen Wert $\mathfrak{k}$ ergeben.

Für *endliche* Gebiete ist demnach diese Darstellung, ganz abgesehen von den erforderlichen Integrationen, nicht einfach, sondern einigermaßen willkürlich. Man vergleiche indessen die Bemerkung am Schlusse von § 4.

§ 2. Die Differentialquotienten von Strahlintegralen.

Unter einem *Strahlintegral*

$$\mathfrak{J}(x, y, z) = \int_0^r f(x_1, y_1, z_1) dr_1 \tag{1}$$

sei das Integral, erstreckt längs der geraden Strecke von P_0 bis $P(x, y, z)$ verstanden. Bezeichnen wir mit α, β, γ die Winkel des Strahles gegen die Achsen, so ist

$$x_1 = x_0 + r_1 \cos\alpha,$$
$$y_1 = y_0 + r_1 \cos\beta,$$
$$z_1 = z_0 + r_1 \cos\gamma,$$

und

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{r},$$

also

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{(x - x_0)}{r^2} \cdot \frac{(x - x_0)}{r} = \frac{1}{r} - \frac{\cos\alpha}{r} \cdot \cos\alpha,$$

ebenso wird

$$\frac{\partial \cos\beta}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha}{r} \cdot \cos\beta,$$

$$\frac{\partial \cos\gamma}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha}{r} \cdot \cos\gamma,$$

und hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{r_1}{r} - \frac{\cos\alpha}{r} r_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cos\gamma \right)$$
$$= \frac{r_1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \cos\alpha \frac{df}{dr_1} \right).$$

Berücksichtigt man endlich noch

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\alpha,$$

so kommt

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \cos\alpha \cdot f(x, y, z) + \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 dr_1 - \frac{\cos\alpha}{r} \int_0^r \frac{df}{dr_1} r_1 dr_1,$$

und durch partielle Integration des letzten Integrals folgt

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{1}{r} \left(\int_0^r \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 dr_1 + \cos\alpha \int_0^r f dr_1 \right). \tag{1'}$$

Es sei nochmals hervorgehoben, daß diese Formel nur dann gilt, wenn längs des Strahles P_0P, also längs einer *Geraden* integriert wird. Die Funktion $f(x, y, z)$ kann natürlich auch durch einen Vektor ersetzt werden. Dasselbe gilt für das folgende Integral

$$J(x, y, z) = \int_0^r r_1 \cdot f(x_1, y_1, z_1) dr_1, \tag{2}$$

das den Differentialquotienten hat

$$\frac{\partial J}{\partial x} = r \cos\alpha f(x, y, z) + \frac{1}{r}\int_0^r \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1^2 dr_1 - \frac{\cos\alpha}{r}\int_0^r \frac{df}{dr_1} r_1^2 dr_1,$$

der sich durch partielle Integration des zweiten Integrals vereinfacht zu

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(\int_0^r \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1^2 dr_1 + 2\cos\alpha \int_0^r f r_1 dr_1\right). \tag{2'}$$

Von den Formeln (2') und (1') wird in den Paragraphen 3 und 4 Gebrauch zu machen sein.

§ 3. Beweis der Formel in § 1.

Wir wollen, *ohne irgendeine Voraussetzung über den Vektor $\mathfrak{A}$ zu machen*, jetzt den curl des Integrals

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r \mathfrak{A} r_1 dr_1\right]$$

bilden. Es ist

$$\mathfrak{B} = [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}],$$

wobei gesetzt ist

$$\mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^2} = -\frac{1}{r}(\mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{i}\cos\beta + \mathfrak{k}\cos\gamma),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{C}) = -\frac{\mathfrak{i}}{r^2} + \frac{2\mathfrak{r}}{r^3}\cos\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \int_0^r \mathfrak{A} r_1 dr_1$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{C} = -\frac{3}{r^2} + \frac{2}{r^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

Nun ist bekanntlich[1])

$$\operatorname{curl}[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}] = (\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{C} - (\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\operatorname{div}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\operatorname{div}\mathfrak{C}.$$

Hierin wird

$$(\mathfrak{D}\nabla) = \left(\int_0^r X r_1\, dr_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \left(\int_0^r Y r_1\, dr_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \left(\int_0^r Z r_1\, dr_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

also

$$(\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{C} = \sum\int_0^r X r_1\, dr_1 \cdot\left(\frac{-\mathfrak{i}}{r^2} + \frac{2\,\mathfrak{r}\cos\alpha}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\int_0^r \mathfrak{A} r_1\, dr_1 + \frac{2\,\mathfrak{r}}{r^4}\left(\mathfrak{r}, \int_0^r \mathfrak{A} r_1\, dr_1\right).$$

Ferner, unter Anwendung von (2′), § 2

$$(\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{D} = -\frac{1}{r^2}\sum\cos\alpha\left(\int_0^r \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x_1} r_1^2\, dr_1 + 2\cos\alpha\int_0^r \mathfrak{A} r_1\, dr_1\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left(\int_0^r \frac{d\mathfrak{A}}{dr_1} r_1^2\, dr_1 + 2\int_0^r \mathfrak{A} r_1\, dr_1\right),$$

d. h. (durch partielle Integration)

$$(\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{D} = -\mathfrak{A}.$$

Es fehlt noch

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \frac{1}{r}\sum\left(\mathfrak{i}, \int_0^r \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x_1} r_1^2\, dr_1 + 2\cos\alpha\int_0^r \mathfrak{A} r_1\, dr_1\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\int_0^r r_1^2 \operatorname{div}\mathfrak{A}\, dr_1 + 2\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}, \int_0^r \mathfrak{A} r_1\, dr_1\right)\right).$$

Die Addition ergibt

$$\operatorname{curl}\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{r}}{r^2}\int_0^r r_1^2 \operatorname{div}\mathfrak{A}\, dr_1.$$

---

1) a. a. O., Seite 112, Gleichung 114.

Ist, wie dies in § 1 angenommen wurde, div $\mathfrak{A} = 0$, so ergibt sich

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \mathfrak{A}.$$

Hiermit ist also die Richtigkeit des in § 1 aufgestellten Satzes bewiesen; wir haben in der Tat nicht nur einen Existenzbeweis, sondern eine einfache Darstellung für ein Vektorfeld $\mathfrak{B}$, aus dem das quellenfreie Vektorfeld $\mathfrak{A}$ durch Bildung des curl sich ergibt.

§ 4. Herstellung einer skalaren Funktion, deren Gradient ein gegebener wirbelfreier Vektor ist.

Der Vollständigkeit halber möge noch die entsprechende, sehr viel einfachere Betrachtung für wirbelfreie Vektorfelder angestellt werden.

Wenn ein Vektorfeld $\mathfrak{A}$ gegeben ist, so bilden wir längs eines Strahles von einem willkürlich gewählten festen Punkt P_0 und $P(x, y, z)$ das skalare Linienintegral:

$$B(x, y, z) = \int_0^r \mathfrak{A}\, d\mathfrak{r}_1 = \left(\frac{\mathfrak{r}}{r}, \int_0^r \mathfrak{A}\, d r_1\right)$$

und untersuchen sodann

$$\nabla B = \mathfrak{i}\frac{\partial B}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial B}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial B}{\partial z}.$$

Es muß sich ergeben, daß dieser Ausdruck gleich $\mathfrak{A}$ wird, vermehrt um ein Zusatzglied, das verschwindet, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0.$$

Wir setzen

$$B = (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}),$$

wobei

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{r}}{r},$$

$$\mathfrak{D} = \int_0^r \mathfrak{A}\, d r_1;$$

wir haben ferner[1])

$$\nabla(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = (\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{D} + (\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{C} + [\mathfrak{C}, \operatorname{curl} \mathfrak{D}] + [\mathfrak{D}, \operatorname{curl} \mathfrak{C}].$$

Es ist noch zu berücksichtigen

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} = \frac{\mathfrak{i}}{r} - \frac{\mathfrak{r}}{r^2}\cos\alpha,$$

1) a. a. O. Seite 112, Gleichung 115.

also

$$\operatorname{curl}\mathfrak{C} = \sum\left[\mathfrak{i}, \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}\right] = -\sum\left[\mathfrak{i}, \frac{\mathfrak{r}\cos\alpha}{r}\right] = 0.$$

Weiterhin ist, mit Anwendung von § 2 (1'):

$$(\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{D} = \frac{1}{r}\sum\cos\alpha\left(\int_0^r\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x_1}r_1\,dr_1 + \cos\alpha\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\int_0^r\frac{d\mathfrak{A}}{dr_1}r_1\,dr_1 + \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right) = \mathfrak{A}(x, y, z).$$

Weiter:

$$(\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{C} = \sum\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\cdot\left(\frac{\mathfrak{i}}{r} - \frac{\mathfrak{r}}{r^2}\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{r}\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1 - \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\left(\mathfrak{r}, \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right).$$

Endlich

$$\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \sum\left[\mathfrak{i}, \frac{1}{r}\left(\int_0^r\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x_1}r_1\,dr_1 + \cos\alpha\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\int_0^r r_1\operatorname{curl}\mathfrak{A}\,dr_1 + \frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right]$$

und demnach

$$[\mathfrak{C}, \operatorname{curl}\mathfrak{D}] = \frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r r_1\operatorname{curl}\mathfrak{A}\,dr_1\right] + \frac{1}{r^3}\left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right]\right]$$

wobei für den zweiten Teil noch geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{r^3}\left(\mathfrak{r}\left(\mathfrak{r}, \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right) - r^2\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right).$$

Durch Vereinigung kommt:

$$\nabla\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \frac{1}{r}\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1 - \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\left(\mathfrak{r}, \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r r_1\operatorname{curl}\mathfrak{A}\,dr_1\right] + \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\left(\mathfrak{r}, \int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1\right) - \frac{1}{r}\int_0^r\mathfrak{A}\,dr_1.$$

Wir haben also den Satz:

Wenn $\mathfrak{A}(x, y, z)$ ein beliebiges Vektorfeld darstellt, und man berechnet das Integral

$$B = \int_0^r \mathfrak{A}\, d r_1 = \left(\frac{\mathfrak{r}}{r}, \int_0^r \mathfrak{A}\, d r_1\right)$$

das längs des Strahles vom festen Punkt (x_0, y_0, z_0) zum Punkte $P(x, y, z)$ zu erstrecken ist, so wird

$$\nabla B = \mathfrak{A} + \frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r r_1 \operatorname{curl} \mathfrak{A}\, d r_1\right].$$

Das Zusatzglied verschwindet, wenn das Vektorfeld wirbelfrei ist.

Das Ergebnis entspricht vollkommen dem vorigen Paragraphen.

Schlußbemerkung: So einfach die Darstellung des Vektorfeldes $\mathfrak{B}(x, y, z)$ in § 3 ist, die ja nur einfache Integrationen erfordert, so leidet sie doch an zweierlei Mängeln: Einmal sind die Kurven, längs deren integriert wird, gerade Linien, nicht beliebig gewählte Kurven (im Gegensatz zur Funktion V beim andern Problem; s. oben Seite 176, Zeile 4 v. u.), andererseits kann sie nicht nutzbar gemacht werden für das wichtige Problem der Zerlegung eines Vektorfeldes in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Bestandteil: Setzt man nach § 3

$$\mathfrak{A} = -\operatorname{curl}\left(\frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}, \int_0^r \mathfrak{A}\, r_1\, d r_1\right]\right) + \frac{\mathfrak{r}}{r^2} \cdot \int_0^r r_1^2 \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d r_1,$$

so ist zwar der erste Bestandteil, wie jeder curl, quellenfrei, der zweite aber, wie man sehr leicht an einem Beispiel erkennt, *nicht* wirbelfrei.

Dasselbe gilt für die in diesem Paragraphen gegebene Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in einen Gradienten, der ja wirbelfrei ist, und ein Zusatzglied, das im allgemeinen nicht quellenfrei ist.

Immerhin dürfte, wenn es sich um das in der Überschrift angegebene Problem, die Darstellung eines quellenfreien Feldes als curl eines andern Feldes, handelt, das Verfahren in § 1 als besonders einfach zu bezeichnen sein.

Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, wie man in einfachster Weise zeigen kann, daß die Vektoroperation

$$\mathrm{curl}\, \mathfrak{A} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial Z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

einen bestimmten, *vom Koordinatensystem unabhängigen* Vektor ergibt.

Es sei $x_1 y_1 z_1$ ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem, die Operationen darin bezeichen wir durch den Index $(_1)$, die Vektoren ebenfalls; es sei ferner

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}X + \mathfrak{j}Y + \mathfrak{k}Z = \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{i}_1 X_1 + \mathfrak{j}_1 Y_1 + \mathfrak{k}_1 Z_1$$

ein und derselbe Vektor, in beiden Systemen. Dann ist bekanntlich

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \mathrm{div}_1 \mathfrak{A}_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}.$$

Ferner sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$ ein konstanter Vektor; dann ist

$$\mathrm{div}\,[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}] = \mathfrak{C}\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$$

$$\mathrm{div}_1\,[\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}_1] = \mathfrak{C}_1\, \mathrm{curl}_1\, \mathfrak{A}_1.$$

Diese beiden skalaren Größen, nämlich die Projektionen von $\mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$ und $\mathrm{curl}_1\, \mathfrak{A}_1$ auf dieselbe (beliebige) Richtung sind also gleich, und da diese Gleichheit für *jede Richtung* gilt, so sind die projizierten Vektoren selber gleich, d. h.

$$\mathrm{curl}\, \mathfrak{A} = \mathrm{curl}_1\, \mathfrak{A}_1,$$

w. z. b. w. Man bedarf also zum Nachweis dieser Identität *nicht* des Stokesschen Satzes.

Druckfertig erklärt 17. VII. 1908.]

Über die Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen der Invarianten.

Von

W. Fr. Meyer.

Dem Andenken an Sophus Lie gewidmet.

Aus der Lieschen Theorie der infinitesimalen Transformationen endlicher kontinuierlicher Gruppen folgt, wie zuerst R. Forsyth[1]) explizite ausgeführt hat, daß eine Invariante resp. Komitante J von Urformen im Gebiete von n homogenen Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ ein System von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\nabla_{ik} = 0 (i \gtrless k;\ i, k = 1, 2 \ldots n)$$

befriedigt, und daß umgekehrt jede in einem gewissen Bereiche eindeutige analytische Funktion der Koeffizienten jener Urformen — in die auch noch die verschiedenen Gattungen von Zwischenvariabeln eingehen können —, die dem Systeme $\nabla_{ik} = 0$ genügt, in dem betreffenden Bereiche eine Invariante resp. Komitante der Urformen ist.

Diese Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ werden in § 1 auf einem direkten Wege, vermöge der Zerlegung einer linearen Substitution S der $x_1, x_2 \ldots x_n$ in gewisse Elementarsubstitutionen, aufgestellt.

Die n^2 Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ sind linear unabhängig und bilden nach Clebsch[2]) ein vollständiges System, d. h. durch Differentiation und Elimination lassen sich keine neuen Gleichungen gewinnen:

---

1) Lond. Math. Soc. Proc. 19, 1888, p. 24. Allerdings hat S. Aronhold schon sehr viel früher (Journ. f. Math. 62, 1863, p. 281) ein System von n^2 charakteristischen Differentialgleichungen für Invarianten aufgestellt, das aber weniger einfach ist.

2) Journ. für Math. 65, 1865, p. 257.

im Sinne von LIE[1]) sagt das aus, daß die infinitesimalen Substitutionen der Koeffizienten und Variabeln, die J gestattet, eine Gruppe bilden. Schwieriger ist die Frage nach den höheren Abhängigkeiten zwischen den n^2 Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ oder genauer: Wie läßt sich aus diesen Gleichungen eine Minimalanzahl μ derselben derart herausgreifen, daß die übrigen Gleichungen als eine Folge aus jenen μ erscheinen, und, wenn dies der Fall, wie lassen sich alsdann die so entstehenden $n^2 - \mu$ Abhängigkeiten zwischen den n^2 Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ analytisch in übersichtlicher Gestalt darstellen?

Diese grundlegende Frage ist fast gleichzeitig von J. DERUYTS[2]), E. STUDY[3]) und L. KRONECKER[4]) in Angriff genommen worden. STUDY reduziert in den Fällen $n = 2$ und 3 die Anzahl der Gleichungen mittels des POISSONschen Klammerprozesses.

DÉRUYTS untersucht seminvariante Funktionen, die nur einem Teile der n^2 Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ genügen, und im übrigen gewisse arithmetische Gewichtsrelationen erfüllen; jeder seiner $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen $\nabla_{ik} = 0 (i < k;\ i = 1, 2 \ldots n - 1)$ wird eine gewisse „Elementarschiebung" der Variabeln zugeordnet, wodurch sie sich auf $n - 1$ Gleichungen reduzieren lassen. KRONECKER setzt die allgemeine Substitution S der $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus $n - 2$ einfacheren „Dekompositionssystemen" zusammen; jedem derselben entspricht eine gewisse Differentialgleichung der Invarianten, und alle übrigen sind eine Folge jener $2n - 2$.

Im folgenden wird das Problem vermöge geeigneter Kombinierung und Weiterführung der angegebenen Methoden vollständig gelöst.

Die in Rede stehende Minimalanzahl μ hat den Wert $n + 1$. Greift man zunächst aus den $n^2 - n = n(n - 1)$ Gleichungen $\nabla_{ik} = 0 (i \neq k)$, die eine „unimodulare" Invariante charakterisieren, irgend n *zyklisch* verbundene heraus, etwa die Serie $\nabla_{12} = 0$,

1) LIE-SCHEFFERS, Kontinuierliche Transformationsgruppen, Leipzig 1893, Kap. 23.

2) Die in einzelnen Abhandlungen (1887—1891) erschienenen Ergebnisse sind zusammengefaßt in der Théorie générale des formes algébriques, Bruxelles 1891.

3) Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889, p. 15.

4) Berliner Berichte 1889, p. 349, 479, 603 = Werke, Band 3, p. 293, 315.

$\nabla_{23} = 0, \ldots, \nabla_{n-1,n} = 0, \nabla_{n,1} = 0$, so sind mit diesen n Gleichungen zugleich sämtliche $n(n-1)$ Gleichungen der bezeichneten Art erfüllt, und, falls man noch irgend eine der n Gleichungen $\nabla_{ii} = 0$ hinzunimmt, überhaupt sämtliche n^2 Gleichungen.

Hierfür werden zwei verschiedene Beweise erbracht; der eine Beweis (§ 2) beruht auf der Zusammensetzung einer Substitution S aus $n+1$ einfachsten Fundamentalsubstitutionen[1]), unter denen sich n zyklische Elementarschiebungen und eine „Elementarstreckung" befinden; der zweite Beweis (§ 3) beruht auf Eigenschaften des Klammerprozesses.

Die wirkliche Darstellung der sämtlichen Abhängigkeiten zwischen den n^2 Gleichungen $\nabla_{ik} = 0$ geschieht dann (§ 3) ebenfalls mit Hilfe des Klammerprozesses und einer geeigneten Weiterbildung dieses Begriffes für den besonderen Fall der Differentialprozesse ∇_{ik}.

Die Ergebnisse lassen sich (§ 3) einmal auf den Fall beliebiger Zwischenvariabeln ausdehnen, andererseits auch auf den Fall „inkongruenter" Substitutionen.[2])

§ 1. Die Differentialgleichungen der Invarianten.

Seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängige Variable, und $f(x), g(x), h(x), \ldots$ homogene Urformen in denselben, die der Einfachheit halber als ganzrational angenommen seien, von den Ordnungen $m, p, q \ldots$

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) \equiv \sum\limits_{i_1=1}^{m} \sum\limits_{i_2=1}^{m} \sum\limits_{i_3=1}^{m} \cdots m_{i_1 i_2 i_3 \ldots} a_{i_1 i_2 i_3 \ldots} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \ (i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m) \\ g(x) \equiv \sum\limits_{k_1=1}^{p} \sum\limits_{k_2=1}^{p} \sum\limits_{k_3=1}^{p} \cdots p_{k_1 k_2 k_3 \ldots} b_{k_1 k_2 k_3 \ldots} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \ (k_1 + k_2 + \cdots + k_n = p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wo die $m_{i_1 i_2 i_3 \ldots}, p_{k_1 k_2 k_3 \ldots}, \ldots$ die den Zerlegungen $m = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$, $p = k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \cdots$ entsprechenden Polynomialkoeffizienten von $m, p, \ldots$ bedeuten, die $a, b, \ldots$ als variierend gedachte (litterale) Koeffizienten.

---

1) Für den Fall $n = 3$ findet sich eine vollständige Durchführung der Zusammensetzungsformeln in meiner Mitteilung: Göttinger Nachrichten 1908, Sitzung vom 21. Februar.

2) Über die Differentialgleichungen dieses Falles vergleiche meine Mitteilung in den Göttinger Nachrichten 1908, Sitzung vom 8. Februar.

Unterwirft man die Variabeln x irgend einer linearen Substitution S:

(2) $$S) x_r = s_{r1} y_1 + s_{r2} y_2 + \cdots + s_{rn} y_n, \qquad (r = 1, 2, \cdots n)$$

mit einer von Null verschiedenen Determinante $\Delta = | s_{ik} |$, und gehen vermöge S die Formen $f(x), g(x) \ldots$ über in neue Formen $\varphi(y)$, $\psi(y), \ldots$, mit Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots$, so heißt eine Funktion $J = J[(a), (b), \ldots]$ der Koeffizientenreihen $a, b, \ldots$ eine Invariante der Urformen $f, g, \ldots$, wenn für alle Werte der $a, b, \ldots, s$ die Identität besteht:

(I) $$J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv \Delta^{\omega} J[(a), (b) \ldots],$$

wo ω, das Gewicht der Invariante, ein fester Exponent ist.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auch hier auf Invarianten J, die in ihren Argumenten ganzrational sind, und demzufolge auf natürliche Zahlen ω (inkl. 0), bemerken aber, daß die folgenden Entwickelungen, bei gewissen Voraussetzungen über die Natur der Funktionen J, von den getroffenen Annahmen unabhängig sind.

Unter den Substitutionen $S(2)$ zeichnen sich gewisse einfachste aus; das sind einmal die $n(n-1)$ „Elementarschiebungen" $A_{ik} (i \neq k)$ vom Typus

(3) $$A_{ik}) \quad x_i = y_i + h_{ik} y_k, \quad x_k = y_k, \quad x_l = y_l, \ldots,$$

andererseits die n „Elementarstreckungen" M_{ii}.:

(4) $$M_{ii}) \quad x_i = m_i y_i, \quad x_k = y_k, \quad x_l = y_l, \ldots$$

Die A_{ik} seien auch kurz mit (x_i, x_k), die M_{ii} mit (x_i, x_i) bezeichnet.[1]) Die ersteren sind unimodular, d. h. ihre Determinante besitzt den Wert Eins; bei den letzteren ist die Determinante gleich m_i. Wendet man auf eine Elementarschiebung A_{ik} (3) die Definition (I) an, wobei also J ungeändert bleibt, und eine „Schiebungsinvariante" bzw. (x_i, x_k) genannt werde, entwickelt alsdann die linke Seite von (I), als Funktion von h_{ik}, nach der MACLAURINschen Reihe, so liefert das Verschwinden des Koeffizienten der ersten Potenz von h_{ik} eine lineare partielle Differentialgleichung $\nabla_{ik} = 0$.

Um dieselbe bequemer zu schreiben, bezeichne man die Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ lieber mit $x, y, z, \ldots$, die Indizes $i_1, i_2 \ldots i_n$;

1) Im folgenden wird auch von der zusammenfassenden Bezeichnung $S_{ik} \left(i \gtreqless k\right)$ Gebrauch gemacht.

$k_1, k_2, \ldots k_n; \ldots$ in (1) mit $i, k, l, \ldots; r, s, t, \ldots; \ldots$, und wähle als Repräsentanten von (x_i, x_k) das Paar (x, y); endlich begnüge man sich statt n-facher Summenzeichen je mit einem einzigen. Dann werden die $n(n-1)$ Differentialgleichungen $\nabla_{ik} = 0 (i \neq k)$ repräsentiert durch den Typus:

$$(\text{II})\; \nabla_{xy} \equiv \sum k a_{i+1\,k-1,\,l \ldots} \frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} + \sum s b_{r+1,\,s-1\;t \ldots} \frac{\partial J}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots = 0$$

Die linke Seite ∇_{xy} von (II) werde auch selbst als „Schiebungsprozeß" bzw. (x, y) bezeichnet.

Die Schiebungen A_{ik}, für ein herausgegriffenes Paar von Indizes i, k, bilden bei variierendem „Schiebungsparameter" h_{ik} eine eingliedrige Gruppe, die „Schiebungsgruppe" bzw. (x_i, x_k); für unendlich kleine Werte von h_{ik} entstehen die infinitesimalen Transformationen der Gruppe.

Aus der Lieschen Theorie der infinitesimalen Transformationen folgt[1]), daß die Bedingung (II) $\nabla_{xy} = 0$ auch *hinreichend* ist, damit eine ihr genügende Funktion $J[(a), (b), \ldots]$ eine Schiebungsinvariante der $f, g \ldots$ bzw. (x, y) ist.

Dies Verfahren überträgt sich mit einer gewissen Modifikation auf die Elementarstreckungen M_{ii} (4). Nimmt man hier etwa die erste Variable $x_1 = x$ als repräsentierende, bezeichnet den bezüglichen Streckungsparameter kurz mit m, und setzt diesen in die Gestalt $m = 1 + h$, entwickelt sodann die linke Seite der Identität (I) wiederum vermöge des Maclaurinschen Gesetzes nach Potenzen von h, andererseits rechts die Potenz $(1 + h)^w$ nach dem binomischen Satze[2]), so führt die Vergleichung der Koeffizienten der ersten Potenz von h zu der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(\text{III})\; \nabla_{xx} \equiv \sum i a_{ikl\ldots} \frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} + \sum r b_{rst\ldots} \frac{\partial J}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots - wJ = 0,$$

1) Diese Tatsache läßt sich auch unabhängig von der Lieschen Theorie auf einem direkten, wenn auch ziemlich mühsamen Wege beweisen, indem man für eine *willkürliche* Funktion J die Entwickelung ableitet: $J[(\alpha), (\beta), \ldots] \equiv J + h_{ik} \nabla_{ik}(J) + \frac{1}{2!} h_{ik}^2 \nabla_{ik}^2 (J) + \cdots$, wo unter den Potenzen von ∇_{ik} die auf J auszuübenden Wiederholungen des Prozesses ∇_{ik} zu verstehen sind. Entsprechendes gilt für die Gleichungen (III).

2) Ist w keine natürliche Zahl, so tritt an die Stelle des binomischen Satzes die binomische Reihe (für genügend kleine Werte von h)

deren linke Seite der „Streckungsprozeß" bzw. x heiße. Die Gleichung (III) repräsentiert n Gleichungen.

Die Elementarstreckungen (x, x) bilden wiederum, bei variierendem „Streckungsparameter" m, resp. h, eine eingliedrige Gruppe, die „Streckungsgruppe" bzw. x, deren infinitesimale Transformationen für unendlich kleine Werte des „Streckungsparameters" h hervorgehen. Nach Lie ist die einzelne Gleichung (III) wiederum hinreichend dafür, daß J eine „Streckungsinvariante" der $f, g, \ldots$ bzw. x ist, d. h. daß sich gemäß (I) der in den transformierten Koeffizienten gebildete Ausdruck J von dem ursprünglichen nur um den Faktor $m^w = (1 + h)^w$ unterscheidet.

Endlich entnimmt man[1]) der Lieschen Theorie, daß, wenn die $n(n-1) + n = n^2$ Differentialgleichungen (II), (III) gleichzeitig erfüllt sind, J zu einer „vollständigen" Invariante der Urformen $f, g \ldots$ wird, d. h. sich nach Maßgabe des Gesetzes (I) gegenüber einer beliebigen Substitution (2) invariant verhält.

Das Ergebnis werde zusammengefaßt in:

Satz I. Eine Invariante J von Urformen $f, g \ldots$, gegenüber einer beliebigen Substitution S der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, oder $x, y, z \ldots$ genügt den $n(n-1) + n = n^2$ linearen partiellen Differentialgleichungen $\nabla_{ik} = 0 (i \neq k)$, $\nabla_{ii} = 0$, die durch (II), (III) repräsentiert sind, und umgekehrt charakterisiert die Gesamtheit dieser n^2 Bedingungen eine vollständige Invariante J vom Gewichte w.

Jede der $n(n-1)$ Bedingungen $\nabla_{ik} = 0$ (II) ist für sich allein notwendig und hinreichend, daß J eine Schiebungsinvariante bzw. (x_i, x_k) ist, und jede der n Bedingungen $\nabla_{ii} = 0$ (III) ist für sich allein notwendig und hinreichend, daß J eine Streckungsinvariante bzw. x_i ist.

§ 2. Die Zusammensetzung von Substitutionen aus Elementarsubstitutionen.

Um die Abhängigkeiten zwischen den n^2 Differentialgleichungen (II), (III) zu erkennen, bietet sich einmal der Weg, eine beliebige Substitution S (2) aus einer geringsten Anzahl von Elementarsubstitutionen, nämlich Elementarschiebungen (3) und Elementarstreckungen (4) zusammenzusetzen.

Unter einem Produkte $S_1 S_2 S_3 \ldots$ mehrerer Substitutionen

1) Der § 2 enthält einen anderen Beweis für den Satz des Textes.

$S_1, S_2, S_3 \ldots$ in n Variabeln werde, wie üblich, die Substitution verstanden, die entsteht, wenn man auf die Variabeln erst S_1, dann S_2, sodann S_3 usw. ausübt.

Bekanntlich ist die Determinante eines Produktes $S_1 S_2 S_3 \ldots$ gleich dem Produkte der Determinanten der einzelnen Substitutionen $S_1, S_2, S_3 \ldots$ Im besonderen setzen sich also unimodulare Substitutionen stets wieder zu solchen zusammen.

Ist die Invariantendefinition (I) bei konstantem Gewichte w der Reihe nach für die Substitutionen $S_1, S_2, S_3 \ldots$ erfüllt, so auch für die zusammengesetzte Substitution $S_1 S_2 S_3 \ldots$

Man wird daher zuvörderst die $n(n-1)$ Elementarschiebungen (3) aus einer geringsten Anzahl von solchen zusammensetzen. Man zeige zu dem Behufe, wie man durch geeignete Kombinierung von zwei Elementarschiebungen des Typus $S_{xy} = (x, y)$, $S_{yz} = (y, z)$ die weitere $S_{xz} = (x, z)$ erzeugt.

Indem man die bezüglichen Schiebungsparameter jeweils in Klammern beifügt, zeigt eine einfache Rechnung, daß sich die Substitution $S_{xy}(h) S_{yz}(k) S_{xy}(h') S_{yz}(k')$ oder auch die andere $S_{yz}(k) S_{xy}(h) S_{yz}(k') S_{xy}(h')$ dann und nur dann auf eine S_{xz} reduziert, wenn die beiden Relationen erfüllt sind:

$$(5) \qquad h + h' = 0, \quad k + k' = 0.$$

Nimmt man demgemäß $h' = -h$, $k' = -k$, so ergeben sich die beiden grundlegenden Erzeugungen:

$$(\mathrm{IV}) \qquad S_{xy}(h) S_{yz}(k) S_{xy}(-h) S_{yz}(-k) = S_{xz}(hk),$$

$$(\mathrm{IV}') \qquad S_{yz}(k) S_{xy}(h) S_{yz}(-k) S_{xy}(-h) = S_{xz}(-hk),$$

die im übrigen gleichwertig sind, da jede von beiden die Umkehrung der andern darstellt, so daß man sich auf die erstere beschränken darf.

Denkt man sich rückwärts den Parameter l von S_{xz} in (IV) beliebig ($\neq 0$) gegeben, so läßt sich von den beiden Parametern h, k der eine, z. B. k noch beliebig ($\neq 0$) wählen, am einfachsten gleich Eins. Die Erzeugung einer $S_{xz}(l)$ aus den Fundamentalsubstitutionen S_{xy}, S_{yz} ist somit repräsentiert durch:

$$(\mathrm{IV^a}) \qquad S_{xz}(l) = S_{xy}(l) S_{yz}(1) S_{xy}(-l) S_{yz}(-1).$$

Demgemäß gilt:

Satz II: Eine Elementarschiebung S_{xz} ist aus zwei anderen solchen vom Typus S_{xy}, S_{yz} als Fundamentalsubstitutionen gemäß (IV^a) erzeugbar.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes lassen sich aus irgend n, einen Zyklus bildenden Elementarschiebungen, die repräsentiert seien durch:

$$(6_1)\qquad S_{12},\ S_{23},\ S_{34},\ \ldots,\ S_{n-1,n},\ S_{n,1},$$

alle übrigen Elementarschiebungen (3) erzeugen.

Dabei empfiehlt es sich, wie üblich, auch Indizes $> n$ zuzulassen, die dann jeweils durch ihren kleinsten positiven Rest mod. n ersetzt zu denken sind. So ist z. B. $S_{n,\,n+1}$ mit $S_{n,1}$ identisch usw.

Durch Anwendung des Satzes II auf je zwei benachbarte S des Zyklus (6_1) gewinnt man die Individuen der zweiten Serie:

$$(6_2)\qquad S_{13},\ S_{24},\ S_{35},\ \ldots,\ S_{n-2,n},\ S_{n-1,n+1},\ S_{n,n+2}\,.$$

Kombiniert man weiter S_{12} mit S_{24}, S_{23} mit S_{35}, ..., so gelangt man zu einer dritten Serie (6_3) vom Typus $S_{r,\,r+3}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$. Fährt man so fort, so ergeben sich im ganzen $n - 1$ Serien (6_1), (6_2), ... (6_{n-1}) von je n Individuen, wo diesen Serien der Reihe nach die konstante Indizesdifferenz $1, 2, \ldots n - 1$ zukommt. Damit sind, wie leicht zu sehen, die sämtlichen $n(n-1)$ Elementarschiebungen $S_{ik} (i \neq k)$ erschöpft. Zugleich ist ersichtlich, daß man mit einer geringeren Anzahl von Elementarschiebungen, als n, nicht auskommen kann, um alle übrigen daraus zu erzeugen. Man hat also den

Satz III. Die $n(n-1)$ Elementarschiebungen $S_{ik} (i \neq k)$ lassen sich aus irgend n, einen Zyklus bildenden, z. B. S_{12}, S_{23}, ... $S_{n,1}$ als Fundamentalsubstitutionen erzeugen, und aus keiner geringeren Anzahl.

Um daher eine beliebig vorgelegte unimodulare Substitution U_n in n Variabeln aus den S_{12}, S_{23}, ... $S_{n,1}$ zusammenzusetzen, genügt es, die U_n in irgendeiner Weise mit Hilfe irgendwelcher der $n(n-1)$ Elementarschiebungen zu erzeugen.

Im Falle $n = 2$ ist die Erzeugung einer beliebigen U_2 aus S_{12} und S_{21} bekannt.[1])

---

1) Man hat die Erzeugung:

$$U_2\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\\ \gamma\,\delta\end{pmatrix} = S_{12}\,(m)\,S_{21}\left(\frac{\delta - 1}{\beta - m\,\delta}\right)S_{12}(\beta - m\,\delta)\cdot S_{21}\left(\frac{\alpha - m\gamma - 1}{\beta - m\delta}\right),$$

wo m einen überzähligen Parameter bedeutet, der im übrigen willkürlich und nur so zu wählen ist, daß $\beta - m\delta$ von Null verschieden ausfällt.

Man bediene sich daher der vollständigen Induktion, nehme die Erzeugung einer U_n aus Elementarschiebungen

$$S_{ik}(i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots n)$$

als erwiesen an, und leite hieraus die entsprechende Erzeugung einer beliebigen U_{n+1} vermöge der $S_{ik}(i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots n+1)$ ab.

Die U_n, mit Koeffizienten u_{ik}, werde als eine U_{n+1} geschrieben, indem man sie mit zwei Reihen von Nullen rändert, und als letztes Element eine Eins hinzufügt.

Der erste Erweiterungsschritt besteht in dem Übergange von der vorgelegten speziellen U_{n+1} zu einer solchen, wo die n ersten Elemente der letzten Kolonne n beliebige Größen $u_{i,n+1}(i = 1, 2, \ldots n)$ aufweisen. Man konstruiere durch Zusammensetzung von n Elementarschiebungen des Typus:

$$(7) \qquad S_{1,n+1}(h_1), \quad S_{2,n+1}(h_2), \ldots, \quad S_{n,n+1}(h_n)$$

die Substitution:

$$(8) \qquad x_i = y_i + h_i y_{n+1}(i = 1, 2, \ldots n), \quad x_{n+1} = y_{n+1}.$$

Setzt man diese mit U_{n+1} zusammen, so entsteht eine neue unimodulare Substitution U'_{n+1}, die sich von U_{n+1} dadurch unterscheidet, daß in der letzten Kolonne statt der n Nullen der Reihe nach die Größen $u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, \ldots, u_{n,n+1}$ auftreten, wo:

$$(9) \quad u_{i,n+1} = h_1 u_{i1} + h_2 u_{i2} + \ldots + h_n u_{in}(i = 1, 2, \ldots n).$$

Da die Determinante dieser, in den n Größen h_i linearen Gleichungen nach Voraussetzung gleich Eins ist, lassen sich dieselben stets nach den h_i auflösen, und man kann so von einer beliebig vorgelegten U'_{n+1} zur U_{n+1} zurückgelangen.

Sodann wird man die n noch in U'_{n+1} verbliebenen Nullen abermals durch beliebige Größen zu ersetzen haben. Man setze n Elementarschiebungen von der Art

$$(10) \qquad S_{n+1,1}(k_1), \quad S_{n+1,2}(k_2), \ldots, \quad S_{n+1,n}(k_n)$$

zusammen zu der Substitution:

$$(11) \quad x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n;\ x_{n+1} = y_{n+1} + k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_n y_n.$$

Übt man diese auf die U'_{n+1} aus, so entsteht eine U''_{n+1}, in deren letzter Kolonne, wie bei U'_{n+1}, die $u_{i,n+1}$, und in deren letzter Reihe die k_i, mit dem letzten Elemente Eins stehen, während die n^2 übrigen Elemente v_{ir} die Werte haben:

$$(12) \qquad v_{ir} = u_{ir} + k_r u_{i,n+1}(i, r = 1, 2 \ldots n).$$

Der eindeutige Rückgang von einer beliebigen U''_{n+1} zur U'_{n+1} vollzieht sich unmittelbar.

Nunmehr ist nur noch der an der letzten Stelle in U''_{n+1} verbliebene Einer durch eine beliebige Größe (inkl. 0) zu ersetzen, um eine ganz beliebige unimodulare Substitution V_{n+1} vor sich zu haben. Ist wenigstens eine der Größen k_i, z. B. k_1 von Null verschieden, so kombiniere man die U''_{n+1} mit einer Elementarschiebung $S_{1,n+1}(m)$, dann treten nur in der letzten Kolonne der V_{n+1} neue Koeffizienten $V_{i,n+1}$, ω auf:

$$(13)\quad v_{i,n+1} = u_{i,n+1} + m v_{i1} (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \omega = 1 + m k_1 .$$

Bei der Auflösung von (13) nach m und den $u_{i,n+1}$ tritt als Nenner nur die von Null verschiedene Größe k_1 auf. Man kann demnach stets wieder rückwärts von einer beliebig vorgelegten V_{n+1} zu einer U''_{n+1} gelangen, solange nicht alle n ersten Elemente k_i der letzten Reihe verschwinden.

Indessen ist der letztere Fall ohne Mühe mittels einer Spezialisierung des beim zweiten Schritte eingeschlagenen Verfahrens auf den soeben behandelten zurückführbar. Verschwinden nämlich alle k_i, so daß $\omega \neq 0$ sein muß, so kombiniere man vorerst V_{n+1} mit einer $S_{n+1,1}(k'_1)$, wo der Parameter k'_1 willkürlich sein darf, nur von Null verschieden. Hiermit wird V_{n+1} zu einer unimodularen W_{n+1}, bei der nur die Elemente der ersten Kolonne neue Werte w_{i1}, k_1 aufweisen:

$$(14)\quad w_{i1} = v_{i1} + k'_1 v_{i,n+1} (i = 1, 2, \ldots, n), \quad k_1 = k'_1 \omega ,$$

wo k_1 sicher nicht verschwindet. Auf diese W_{n+1} ist aber das durch die Umkehrung von (13) repräsentierte Verfahren anwendbar.

Demnach ist jede unimodulare Substitution in n Variabeln aus Elementarschiebungen erzeugbar.

Die Verbindung dieses Ergebnisses mit Satz (III) liefert[1]):

Satz IV. Jede unimodulare Substitution in n Variabeln ist aus n, einen Zyklus bildenden Elementar-

---

1) Der Satz IV gilt auch für die Erzeugung unimodularer Substitutionen U_n mit ganzzahligen Koeffizienten aus Elementarschiebungen mit ganzzahligen Parametern (± 1). Man erkennt dies, wenn man das Verfahren des Textes kombiniert mit dem von H. Weber (Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, p. 75) für den Fall $n = 2$ angegebenen alternierenden Prozesse: man hat letzteren nur sukzessive auf zwei geeignete Kolonnen der Substitutionsdeterminante zu übertragen, bis sich die U_n auf eine U_{n-1} reduziert.

schiebungen — und, abgesehen von besonderen Fällen, auch aus keiner geringeren Anzahl solcher — als Fundamentalsubstitutionen erzeugbar.

Daß endlich eine beliebig vorgelegte Substitution $S(2)$ mit einer von Null und Eins verschiedenen Determinante Δ vermöge irgendeiner Elementarstreckung (3) von der Art: $x_i = \frac{1}{\Delta} y_i$ (während alle übrigen Variabeln ungeändert bleiben) auf eine unimodulare Substitution reduzierbar ist, liegt auf der Hand. Es gilt daher:

Satz V. Betrachtet man n Elementarschiebungen $S_{ik}(i \neq k)$ eines Zyklus nebst irgendeiner Elementarstreckung S_{ii} als Fundamentalsubstitutionen, so läßt sich aus ihnen eine beliebig vorgelegte Substitution S in n Variabeln mit einer nicht verschwindenden Determinante erzeugen, und eine Erzeugung von S mittels einer geringeren Anzahl von Elementarsubstitutionen ist im allgemeinen nicht möglich.

Aus den Satzen IV und V folgt aber ohne weiteres:

Satz VI. Von den $n(n-1)$ linearen partiellen Differentialgleichungen (II) $\nabla_{ik} = 0 (i \neq k)$ für eine unimodulare Invariante J von Urformen $f, g, \ldots$ in n homogenen Variabeln genügen bereits irgend n zyklisch verbundene, z. B. $\nabla_{12} = 0$, $\nabla_{23} = 0, \ldots, \nabla_{n,1} = 0$, um J als eine unimodulare Invariante der $f, g, \ldots$ zu charakterisieren, indem sich alle übrigen $(n-1)^2$ Gleichungen $\nabla_{ik} = 0 (i \neq k)$ als eine Folge jener n ersten darstellen. Soll überdies die unimodulare Invariante J zu einer vollständigen Invariante der $f, g \ldots$, von einem Gewichte w, werden, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß noch irgendeine der n linearen partiellen Differentialgleichungen (III) $\nabla_{ii} = 0$ erfüllt ist; die $n-1$ weiteren Gleichungen dieser Art sind dann von selbst erfüllt.

§ 3. Analytische Darstellung der Abhängigkeiten zwischen n^2 Differentialgleichungen einer Invariante.

Sind A, B beliebige linearpartielle Differentiationsprozesse in n unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$:

$$(15) \qquad A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad B = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

wo die α_i, β_i beliebige (in einem gewissen Bereiche eindeutige, differentiierbare) Funktionen der z_i bedeuten, und versteht man unter AB die Aufeinanderfolge der Prozesse B, A, so ist der POISSONsche „Klammerprozeß" $\{AB\}$ definiert durch

$$\{AB\} = AB - BA. \tag{16}$$

Die Ausführung der rechten Seite liefert die Darstellung:

$$\{AB\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \begin{vmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_k} & \frac{\partial \beta_i}{\partial z_k} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Für A, B setze man insbesondere zwei Prozesse ∇_{xy}, ∇_{yz} vom Typus (II):

$$\begin{cases} A = \nabla_{xy} = \sum k a_{i+1,k-1,l\ldots} \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} + \sum s b_{r+1,s-1,t\ldots} \frac{\partial}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots, \\ B = \nabla_{yz} = \sum l a_{i,k+1,l-1,\ldots} \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} + \sum t b_{r,s+1,t-1,\ldots} + \cdots, \end{cases} \tag{18}$$

$$(i + k + l + \cdots = m, \quad r + s + t + \cdots = p, \cdots)$$

wo nunmehr die $a_{ikl\ldots}, b_{rst\ldots}, \ldots$ die Rolle der Variabeln z spielen.

Man betrachte rechts zunächst je den ersten, auf die Koeffizienten $a_{ikl\ldots}$ der Urform $f(1)$ bezüglichen Bestandteil; der bezügliche Teil des Prozesses $\{\nabla_{xy}\nabla_{yz}\}$ sei $\{\nabla_{xy}\nabla_{yz}\}_f$. Bezeichnet man für den Augenblick die Koeffizienten der $\frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}}$ in ∇_{xy}, ∇_{yz} mit $\alpha_{ikl\ldots}, \beta_{ikl\ldots}$, also:

$$\alpha_{ikl\ldots} = k a_{i+1,k-1,l\ldots}, \quad \beta_{ikl\ldots} = l a_{i,k+1,l-1\ldots}, \tag{19}$$
$$(i + k + l + \cdots = m),$$

so erhält man auf Grund von (17) und (19):

$$\{\nabla_{xy}\nabla_{yz}\}_f = \sum \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1k_1l_1\ldots}, & \beta_{i_1k_1l_1\ldots} \\ \frac{\partial \alpha_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}}, & \frac{\partial \beta_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

wo sowohl die Indizes $i, k, l, \ldots$, wie die Indizes $i_1, k_1, l_1, \ldots$ alle nichtnegativen ganzzahligen Wertsysteme mit der Summe m (Ordnung von f) durchlaufen. Nun verschwinden aber gemäß (19) alle $\frac{\partial \beta_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}}$, mit Ausnahme des Falles $i_1 = i$, $k_1 = k + 1$, $l_1 = l - 1, \ldots$, wo

$$\frac{\partial \beta_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1}} = l, \tag{21a}$$

und entsprechend verschwinden alle $\frac{\partial \alpha_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1 k_1 l_1 \ldots}}$, mit Ausnahme des Falles $i_1 = i + 1$, $k_1 = k - 1$, $l_1 = l, \ldots$, wo:

$$\text{(21 b)} \qquad \frac{\partial \alpha_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1 k_1 l_1 \ldots}} = k.$$

Demnach reduziert sich der Koeffizient von $\frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}}$ in (20) auf:

$$\text{(22)} \qquad l a_{i+1,k,l-1,\ldots} \{(k+1) - k\} = l a_{i+1,k,l-1,\ldots}$$

und (20) wird zu:

$$\text{(23)} \qquad \{\nabla_{xy} \nabla_{yz}\}_f = \sum l a_{i+1,k,l-1,\ldots} \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}}.$$

Verfährt man analog mit den Aggregaten $\{\nabla_{xy} \nabla_{yz}\}_g$, usw., so ergibt sich für den vollständigen Klammerprozeß $\{\nabla_{xy} \nabla_{yz}\}$:

$$\text{(24)} \quad \{\nabla_{xy} \nabla_{yz}\} = \sum l a_{i+1,k,l-1,\ldots} \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} + \sum t b_{r+1,s,t-1,\ldots} \frac{\partial}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots$$

Hier ist aber die rechte Seite gemäß (II) nichts anderes als der Prozeß ∇_{xz}, somit gilt die grundlegende Identität:

$$\text{(V)} \qquad \{\nabla_{xy} \nabla_{yz}\} \equiv \nabla_{xy} \nabla_{yz} - \nabla_{yz} \nabla_{xy} = \nabla_{xz}.$$

Um dieselbe allgemeiner zu schreiben, bediene man sich wieder der früheren Bezeichnung $\nabla_{ik}, \nabla_{kl}, \nabla_{il}$ für die den Elementarschiebungen (x_i, x_k), (x_k, x_l), (x_i, x_l) korrespondierenden Schiebungsprozesse (II); dann nimmt (V) die Gestalt an $(i \neq k,\ k \neq l,\ i \neq l;\ i, k, l = 1, 2, \ldots n)$:

$$\text{(V}'\text{)} \qquad \{\nabla_{ik} \nabla_{kl}\} \equiv \nabla_{ik} \nabla_{kl} - \nabla_{kl} \nabla_{ik} = \nabla_{il},$$

und man hat:

Satz VII. Zwischen irgend drei linearpartiellen Schiebungsprozessen (II) vom Typus $\nabla_{ik}, \nabla_{kl}, \nabla_{il}$ besteht die Abhängigkeit (V′).

Die Identität (V′) und der Satz VII korrespondieren der Gleichung (IV a) und dem Satze II über die Erzeugung einer Elementarschiebung S_{il} aus den Elementarschiebungen S_{ik}, S_{kl}.

Auf Grund des Satzes VII lassen sich die nach § 2 zwischen den $n(n-1)$ Schiebungsprozessen $\nabla_{ik} (i \neq k)$ bestehenden $n(n-1) - n = (n-1)^2$ Abhängigkeiten in sehr einfacher und übersichtlicher Gestalt darstellen.

Man fasse den Klammerausdruck in dem besonderen Falle

(V') der Prozesse ∇_{ik}, ∇_{kl} als ein symbolisches, eben durch eine geschweifte Klammer zu bezeichnendes Produkt $\{\nabla_{ik}\nabla_{kl}\}$ auf:

Dann findet die Herleitung der Schiebungsprozesse (6_2), (6_3).. (6_{n-1}) aus den Schiebungen $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_{n,1}$ des Zyklus (6_1) ihre Übertragung auf die entsprechenden Schiebungsprozesse ∇_{ik} auf Grund des Gesetzes (V'). Zunächst hat man:

$$(6_2') \qquad \nabla_{r,r+2} = \{\nabla_{r,r+1}\nabla_{r+1,r+2}\}, \ (r = 1, 2, \ldots n).$$

Sodann kommt, entsprechend der Serie (6_3), unter Benutzung von $(6_2')$:

$$(6_3') \qquad \nabla_{r,r+3} = \Big\{\nabla_{r,r+1}\{\nabla_{r+1,r+2}\nabla_{r+2,r+3}\}\Big\}$$
$$= \Big\{\{\nabla_{r,r+1}\nabla_{r+1,r+2}\}\nabla_{r+2,r+3}\Big\}.$$

Die rechte Seite enthält die Weiterbildung des Produktbegriffes für den Fall von drei konsekutiven Prozessen des Zyklus $\nabla_{12}, \nabla_{23}, \ldots, \nabla_{n,n+1}$.

Bei allgemeinen Prozessen A, B, C vom Typus (15) würde eine derartige Erweiterung des Produktbegriffes $\{AB\}$ zwecklos sein. Denn die bekannte Jacobische Identität

$$(25) \qquad \Big\{\{AB\}C\Big\} + \Big\{\{BC\}A\Big\} + \Big\{\{CA\}B\Big\} \equiv 0$$

lehrt, daß ein solches Produkt $\Big\{\{AB\}C\Big\}$ nicht einmal das assoziative Gesetz befolgen würde. In unserem besonderen Falle dagegen, wo $A = \nabla_{ik}$, $B = \nabla_{kl}$, $C = \nabla_{lm}$, verschwindet $\{\nabla_{lm}\nabla_{ik}\}$ identisch, da S_{lm}, S_{ik} unabhängig voneinander, also auch vertauschbar sind. Da ferner stets $\{AB\} = -\{BA\}$, so reduziert sich in der Tat die Jacobische Identität (25) auf:

$$(26) \qquad \Big\{\{\nabla_{ik}\nabla_{kl}\}\nabla_{lm}\Big\} = \Big\{\nabla_{ik}\{\nabla_{kl}\nabla_{lm}\}\Big\}.$$

Das ist aber gerade das in der rechten Seite von $(6_3')$ bereits enthaltene assoziative Gesetz für das „Produkt" von $\nabla_{ik}, \nabla_{kl}, \nabla_{lm}$.

Fährt man so fort, und verbindet die Erzeugung der Serien (6_2), (6_3), ... (6_{n-1}) aus dem Zyklus (6_1) mit dem elementaren Beweise der Arithmetik, daß ein Produkt aus einer beliebigen Anzahl s von Faktoren das assoziative Gesetz befolgt, sobald dies für drei Faktoren gilt, so gelangt man zu dem Begriffe *des symbolischen Produktes von $s(\leq n)$ sukzessiven Prozessen des Zyklus $\nabla_{12}, \nabla_{23}, \ldots \nabla_{n,n+1}$*:

$$(\text{VI}) \qquad \{\nabla_{r,r+1}\nabla_{r+1,r+2}\nabla_{r+3,r+4}\cdots\nabla_{r+s-1,r+s}\}.$$

Man zerlege, *ohne die Reihenfolge zu ändern*, zuvörderst in irgendzwei Gruppen:

$$\{\nabla_{r,r+1}\nabla_{r+1,r+2}\cdots\nabla_{r+t-1,r+t}\},\ \{\nabla_{r+t,r+t+1}\cdots\nabla_{r+s-1,r+s}\},$$

diese wiederum von neuem usw., bis man schließlich entweder zu einzelnen ∇ gelangt, oder aber zu Produkten von zwei solchen, die konsekutiv sind. Vereinigt man alle diese so erhaltenen Prozesse in dem von r nach $r+s$ hinlaufenden Sinne vermöge sukzessiver Anwendung des Klammerprozesses $\{AB\}$, so folgt auf grund wiederholter Anwendung des Gesetzes (V'), daß der Wert des Produktes (VI) unabhängig ist von der Art der Spaltungen in Teilgruppen.

Damit ergibt sich als Verallgemeinerung von (V') das Gesetz:

$$\text{(VII)}\qquad \nabla_{r,r+s} = \{\nabla_{r,r+1}\nabla_{r+1,r+2},\ldots\nabla_{r+s-1,r+s}\},$$

wo die Indizes r, s unabhängig voneinander die Werte 1 bis n, resp. 1 bis $n-s$ durchlaufen können.

Verschwinden insbesondere n zyklische Prozesse ∇_{12}, ∇_{23}, .. $\nabla_{n,n+1}$, so auch alle übrigen $\nabla_{ik}(i \neq k)$. Damit ist bewiesen:

Satz VIII: Die Abhängigkeit zwischen den $n(n-1)$ Differentialprozessen (II) $\nabla_{ik}(i \neq k)$, und damit im besonderen die Abhängigkeiten zwischen den $n(n-1)$, den Elementarschiebungen (3) S_{ik} entsprechenden linearen partiellen Differentialgleichungen $\nabla_{ik}=0$ für eine unimodulare Invariante, finden ihren analytischen Ausdruck in der Identität (VII), wo rechterhand das durch (VI) definierte symbolische Produkt von s sukzessiven Prozessen $\nabla_{ik}(i<k)$ mit konstanter Indizesdifferenz Eins steht.

Es bleibt noch übrig, einen ähnlichen Zusammenhang zwischen den n zyklischen Schiebungsprozessen ∇_{12}, ∇_{23}, ... $\nabla_{n,n+1}$ und irgendzweien der Streckungsprozesse (III) ∇_{rr} herzustellen.

Im Klammerausdrucke $\{AB\}$ (17) nehme man jetzt für A, B die Prozesse ∇_{xy}, ∇_{yx} (18):

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} A = \nabla_{xy} &= \sum k a_{i+1,k-1,l,\ldots}\frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} \\ &\quad + \sum s b_{r+1,s-1,t,\ldots}\frac{\partial}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots, \\ B = \nabla_{yx} &= \sum i a_{i-1,k+1,l,\ldots}\frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} \\ &\quad + \sum r b_{r-1,s+1,t,\ldots}\frac{\partial}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots \end{aligned}\right.$$

Indem man sich vorerst wieder auf den der Urform f entsprechenden, mit $\{\nabla_{xy}\nabla_{yx}\}_f$ zu bezeichnenden Teil des Prozesses $\{\nabla_{xy}\nabla_{yx}\}$ beschränkt, hat der Koeffizient $\alpha_{ikl\ldots}$, $\beta_{ikl\ldots}$ von $\frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}}$ in A resp. B gemäß (27) den Wert:

$$(28) \qquad \alpha_{ikl\ldots} = k a_{i+1,k-1,l,\ldots}, \qquad \beta_{ikl\ldots} = i a_{i-1,k+1,l,\ldots}$$

Dann entsteht auf Grund von (17):

$$(29) \qquad \{\nabla_{xy}\nabla_{yx}\}_f = \sum \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1k_1l_1\ldots}, & \beta_{i_1k_1l_1\ldots} \\ \frac{\partial \alpha_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}}, & \frac{\partial \beta_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}} \end{vmatrix},$$

wo, wie in (20) stets die Summe der $i, k, l, \ldots$ gleich der Summe, der $i_1, k_1, l_1, \ldots$, gleich der Ordnung m von f ist.

Mit Rücksicht auf (28) verschwinden in (29) alle $\frac{\partial \alpha_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}}$ mit Ausnahme des Falles $i_1 = i + 1$, $k_1 = k - 1$, $l_1 = l, \ldots$, wo sich der Wert k ergibt, und entsprechend verschwinden alle $\frac{\partial \beta_{ikl\ldots}}{\partial a_{i_1k_1l_1\ldots}}$ mit Ausnahme des Falles $i_1 = i - 1$, $k_1 = k + 1$, $l_1 = l, \ldots$, wo man den Wert i erhält.

Im ersteren Falle hat die einzige, in (29) nicht verschwindende Determinante den Wert $-k(i+1)a_{ikl\ldots}$, und in letzterem Falle den Wert $+i(k+1)a_{ikl\ldots}$ Mithin gelangt man, bei analoger Berücksichtigung der weiteren Urformen $g, h, \ldots$, zu der Darstellung

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} \{\nabla_{xy}\nabla_{yx}\} &= \sum (i-k) a_{ikl\ldots} \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}} \\ &+ \sum (r-s) b_{rst\ldots} \frac{\partial}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots \end{aligned} \right.$$

Hier ist aber gemäß (III) die rechte Seite nichts anderes als die Differenz $\nabla_{xx} - \nabla_{yy}$, und es besteht die zweite fundamentale Identität:

$$(\text{VIII}) \qquad \{\nabla_{ik}\nabla_{ki}\} = \nabla_{ii} - \nabla_{kk} \; (i \neq k,\; i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Hieraus folgt sofort die Darstellung irgendeines $\nabla_{rr} (r > 1)$ vermöge ∇_{11} und der ersten r der n zyklischen $\nabla_{12}, \nabla_{23}, \ldots \nabla_{n1}$:

$$(\text{VIII}') \quad \nabla_{rr} = \nabla_{11} - \{\nabla_{12}\nabla_{21}\} - \{\nabla_{23}\nabla_{32}\} - \ldots - \{\nabla_{r-1,r}\nabla_{r,r-1}\}$$

und damit:

Satz IX. Die Abhängigkeit der $n - 1$ Streckungs-

prozesse $\nabla_{rr}(r > 1)$ von dem ersten, ∇_{11}, und den n zyklischen Schiebungsprozessen $\nabla_{12}, \nabla_{23}, \ldots \nabla_{n1}$, und damit wiederum im besonderen die Abhängigkeiten zwischen den entsprechenden linearen partiellen Differentialgleichungen für eine Invariante J, findet ihren analytischen Ausdruck in der Identität (VIII').

Die Sätze VIII und IX enthalten sämtliche Abhängigkeiten zwischen den n^2 Prozessen $\nabla_{ik}(i \gtrless k)$, und damit zwischen den n^2 Differentialgleichungen für eine vollständige Invariante J; diese n^2 Gleichungen sind in Wahrheit mit nur $n + 1$ gewissen derselben gleichwertig, insofern alle übrigen eine Folge jener $n + 1$ sind.

Da eine einzelne Gleichung $\nabla_{rr} = 0$ für sich vermöge ihrer Herleitung aussagt, daß der Ausdruck J in der Gesamtheit der Koeffizientenreihen $a_{ikl\ldots}, b_{rst\ldots}, \ldots$ bezüglich des r^{ten} Index *isobar* ist, von einem konstanten Gewichte w, so folgt aus den Sätzen VIII und IX insbesondere, daß eine unimodulare Invariante J der Urformen $f, g, h, \ldots$, die überdies bezüglich irgendeiner einzigen der n Indizes *isobar*[1]) ist, von einem Gewichte w, die letztere Eigenschaft auch bezüglich aller übrigen Indizes besitzt, und damit zu einer vollständigen Invariante der $f, g, h, \ldots$ wird.

Addiert man andererseits die n Prozesse $\nabla_{rr}(r = 1, 2, \ldots n)$ so entsteht:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} \nabla_{rr} = m \sum a_{ikl\ldots} \frac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} + p \sum b_{rst\ldots} \frac{\partial J}{\partial b_{rst\ldots}} + \cdots \\ - n w J. \end{aligned} \right.$$

Es werde angenommen, daß J eine unimodulare Invariante der $f, g, h, \ldots$ sei, die *einzeln* in den Koeffizientenreihen $a_{ikl\ldots}$, $b_{rst\ldots}, \ldots$ der $f, g, \ldots$ homogen ist, von den resp. Dimensionen

1) Es habe J die Gestalt

$$J = \sum c\, a_{ikl\ldots}^{\varepsilon_{ikl\ldots}}\, a_{i_1k_1l_1\ldots}^{\varepsilon_{i_1k_1l_1\ldots}} \ldots b_{rst\ldots}^{\eta_{rst\ldots}}\, b_{r_1s_1t_1\ldots}^{\eta_{r_1s_1t_1\ldots}} \ldots,$$

wo die c nummerische Faktoren sind, so sind die Bedingungen $\Delta_{11} = 0$, $\Delta_{22} = 0, \ldots$, wie schon Deruyts (l. c.) festgestellt hat, gleichwertig mit den arithmetischen Gewichtsrelationen, die eben den Isobarismus hinsichtlich des ersten, zweiten ... Index aussagen:

$$\sum i \varepsilon_{ikl\ldots} + \sum r \eta_{rst\ldots} + \cdots = w,$$

$$\sum k \varepsilon_{ikl\ldots} + \sum s \eta_{rst\ldots} + \cdots = w, \text{ usw.}$$

$d_f, d_g \ldots$ Durch Anwendung des EULERschen Satzes auf die Summen rechterhand von (31) entsteht:

$$(32) \qquad \sum_{r=1}^{n} \nabla_{rr} = (md_f + pd_g + qd_h + \cdots - nw)J.$$

Aus (VIII) folgt, daß das Verschwinden von $\nabla_{12}, \nabla_{23}, \ldots \nabla_{n1}$ nebst $\sum_1^n \nabla_{rr}$ das der einzelnen ∇_{rr} nach sich zieht. Das Verschwinden von $\sum_1^n \nabla_{rr}$ besagt, daß die Relation besteht:

$$(33) \qquad md_f + pd_g + qd_h + \cdots = nw:$$

Satz X. Ist eine unimodulare Invariante J in den Koeffizientenreihen der Urformen $f, g, h, \ldots$ einzeln homogen von den Dimensionen $d_f, d_g, d_h, \ldots$, und besteht zwischen diesen Dimensionen eine Relation von der Gestalt (33), wo $m, p, q, \ldots$ die Ordnungen von $f, g, h, \ldots$ bedeuten, so wird damit J zu einer vollständigen Invariante der $f, g, h, \ldots$, vom Gewichte w.

Die Entwickelungen des Textes gestatten einmal die Ausdehnung auf den allgemeineren Fall, wo die Urformen $f, g, h, \ldots$ mehrere Variabelnreihen $x_1, x_2, \ldots x_n, x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, usw. enthalten, die inkongruenten, d. h. voneinander unabhängigen Substitutionen $S, S', \ldots$ unterliegen.[1]) Jeder der Variabelnreihen korrespondiert dann, für eine Invariante J gegenüber sämtlichen Substitutionen $S, S' \ldots$ ein System von n^2, resp. n'^2, usw. Differentialgleichungen $\nabla_{ik} = 0$, $\nabla'_{ik} = 0$ $(i \gtrless k)$, usw., und für jedes einzelne dieser Systeme gelten die oben aufgestellten Abhängigkeiten.

Andererseits kann man an Stelle der bisher betrachteten Invarianten $J = J[(a), (b), \ldots]$ „in engerem Sinne" allgemeinere „Komitanten" zugrunde legen, die auch noch von Variabelnreihen abhängen, Kovarianten, Kontravarianten, Zwischenformen usw.

Die Entwickelungen des § 2 bleiben überhaupt unberührt davon, welcherlei Variabeln die invarianten Bildungen außer den Koeffizienten der Urformen enthalten. Dagegen bedarf das in § 3 eingeschlagene Verfahren der Klammerprozesse einer Ergänzung.

1) Man vgl. meine Mitteilung in den Göttinger Nachrichten 1908, Sitzung vom 8. Februar.

Seien $p(<n)$ kogrediente Variabelnreihen (x), (y), (z), ... vorgelegt, so nennt man die „Zwischenvariabeln $p$ter Stufe“ die der Matrix jener Reihen zu entnehmenden Determinanten

$$(34) \qquad x_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} = | x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_p} |.$$

Die Komitante J enthalte etwa je eine von jeder Gattung der Zwischenvariabeln; setzt man in J die vermöge einer Substitution (2) entstehenden neuen Koeffizienten und Variabeln ein, so soll die Bedingung (I) erfüllt sein. Die in § 1 eingeschlagene Methode führt dann zu den n^2, zu (II) (III) analogen Forsyth-schen Differentialgleichungen

$$(\mathrm{II}') \quad \underset{(i \neq k)}{\mathsf{E}_{ik}} \equiv \nabla_{ik} - x_i \frac{\partial J}{\partial x_k} - \sum x_{ir} \frac{\partial J}{\partial x_{kr}} - \sum x_{irs} \frac{\partial J}{\partial x_{krs}} - \cdots$$
$$- x_{irst\ldots n} \frac{\partial J}{\partial x_{krst\ldots n}} = 0,$$

$$(\mathrm{III}') \quad \mathsf{E}_{ii} \equiv \nabla_{ii} - x_i \frac{\partial J}{\partial x_i} - \sum x_{ir} \frac{\partial J}{\partial x_{ir}} - \sum x_{irs} \frac{\partial J}{\partial x_{irs}} - \cdots$$
$$- x_{irst\ldots n} \frac{\partial J}{\partial x_{irst\ldots n}} = 0.$$

Hier sind unter ∇_{ik}, ∇_{ii} die Prozesse (II), (III) zu verstehen, und innerhalb der Summen durchlaufen die von i und k, resp. von i, und unter sich verschiedenen Indizes $r, s, t \ldots$ alle erlaubten Kombinationen der ersten, zweiten, ... $(n-2)$ten Klasse innerhalb der Indizes $1, 2 \ldots n$.

Es soll die Wirkung der beiden Klammerprozesse $\{\mathsf{E}_{12} \mathsf{E}_{23}\}$ und $\{\mathsf{E}_{12} \mathsf{E}_{21}\}$ auf die Teilaggregate $p$ter Stufe untersucht werden.

Man bezeichne im ersteren Falle wieder die Koeffizienten von $\frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}}$ $(r, s = 2, 3 \ldots p)$ in E_{12} mit $\alpha_{1rs\ldots}$, die von $\frac{\partial}{\partial x_{2rs\ldots}}$ $(r, s = 1, 3 \ldots p)$ in E_{23} mit $\beta_{2rs\ldots}$, so haben dieselben gemäß (II′) die Werte:

$$(35) \qquad \alpha_{1rs\ldots} = - x_{2rs\ldots}, \quad \beta_{2rs\ldots} = - x_{3rs\ldots}$$

Somit wird:

$$(35\mathrm{a}) \qquad \frac{\partial \alpha_{1rs\ldots}}{\partial x_{2rs\ldots}} = -1, \quad \frac{\partial \beta_{2rs\ldots}}{\partial x_{3rs\ldots}} = -1,$$

während alle übrigen Ableitungen der α, β verschwinden. Auf Grund der allgemeinen Formel (17) verschwinden bei der Bildung von $\{E_{12}, E_{23}\}$ gemäß (35), (35a) alle Glieder außer den folgenden:

(36) $$\sum \frac{\partial}{\partial x_{12st\ldots}} \begin{vmatrix} \alpha_{13st\ldots}, & \beta_{13st\ldots} \\ \frac{\partial \alpha_{12st\ldots}}{\partial x_{13st\ldots}}, & \frac{\partial \beta_{12st\ldots}}{\partial x_{13st\ldots}} \end{vmatrix} + \sum \frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}} \begin{vmatrix} \alpha_{2rs\ldots}, & \beta_{2rs\ldots} \\ \frac{\partial \alpha_{1rs\ldots}}{\partial x_{2rs\ldots}}, & \frac{\partial \beta_{1rs\ldots}}{\partial x_{2rs\ldots}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x_{12st\ldots}} \begin{vmatrix} -x_{23st}, & 0 \\ 0, & -1 \end{vmatrix} + \sum \frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}} \begin{vmatrix} 0, & -x_{3rs\ldots} \\ -1, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\sum x_{32st\ldots} \frac{\partial}{\partial x_{12st\ldots}} - \sum x_{3rs\ldots} \frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}}.$$

Damit ist man aber gerade zu den in E_{13} auftretenden Teilaggregaten $p$ter Stufe gelangt, und es gilt, als Verallgemeinerung der Identität (V'):

(Va) $$\{E_{ik}, E_{kl}\} = E_{il}.$$

Man gehe jetzt zu $\{E_{12} E_{21}\}$ über. Bedeuten jetzt $\alpha_{1rs\ldots}$, $\beta_{2rs\ldots}$ $(r, s\ldots > 2)$ die Koeffizienten von $\frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}}$, $\frac{\partial}{\partial x_{2rs\ldots}}$ in E_{12}, E_{21}, so hat man auf Grund von (III'):

(37) $$\alpha_{1rs\ldots} = -x_{2rs\ldots}, \quad \beta_{2rs\ldots} = -x_{1rs\ldots},$$

(37a) $$\frac{\partial \alpha_{1rs\ldots}}{\partial x_{2rs\ldots}} = -1, \quad \frac{\partial \beta_{2rs\ldots}}{\partial x_{1rs\ldots}} = -1,$$

während wiederum alle übrigen Ableitungen der α, β verschwinden. Von den Teilaggregaten $p$ter Stufe in $\{E_{12}, E_{21}\}$ verbleiben gemäß (37), (37a) nur die folgenden Glieder:

(38) $$\sum \frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}} \begin{vmatrix} \alpha_{2rs\ldots}, & \beta_{2rs\ldots} \\ \frac{\partial \alpha_{1rs\ldots}}{\partial x_{2rs\ldots}}, & \frac{\partial \beta_{1rs\ldots}}{\partial x_{2rs\ldots}} \end{vmatrix} + \sum \frac{\partial}{\partial x_{2rs\ldots}} \begin{vmatrix} \alpha_{1rs\ldots}, & \beta_{1rs\ldots} \\ \frac{\partial \alpha_{2rs\ldots}}{\partial x_{1rs\ldots}}, & \frac{\partial \beta_{2rs\ldots}}{\partial x_{1rs\ldots}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}} \begin{vmatrix} 0, & -x_{1rs\ldots} \\ -1, & 0 \end{vmatrix} + \sum \frac{\partial}{\partial x_{2rs\ldots}} \begin{vmatrix} -x_{2rs\ldots}, & 0 \\ 0, & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\sum x_{1rs\ldots} \frac{\partial}{\partial x_{1rs\ldots}} + \sum x_{2rs\ldots} \frac{\partial}{\partial x_{2rs\ldots}}.$$

Damit ist man aber, auf Grund von (III'), gerade zu den in $E_{11} - E_{22}$ auftretenden Teilaggregaten $p$ter Stufe gelangt, und es gilt, als Verallgemeinerung von (VIII), die Identität:

(VIIIa) $$\{E_{ik}, E_{ki}\} = E_{ii} - E_{kk}.$$

Im übrigen bleiben sämtliche, oben aus (V'), (VIII) gezogenen Folgerungen bestehen; man hat nur jeweils jeden ∇-Prozeß durch den entsprechenden E-Prozeß zu ersetzen.

Enthält J von irgendeiner Gattung der Zwischenvariabeln mehrere kogrediente Systeme, so hat man in (II′), (III′) nur die bezüglichen Summen auf jene Systeme auszudehnen, was auf die Ergebnisse (Va), (VIIIa) keinen Einfluß ausübt. Umgekehrt können eine oder mehrere oder auch sämtliche Gattungen von Zwischenvariabeln in J garnicht auftreten, dann fallen in (II′), (III′) einfach die bezüglichen Terme weg. Enthalten andererseits die Formen J überhaupt keine Koeffizienten, werden also zu „identischen“ Komitanten, so sind in (II′), (III′) die Aggregate ∇_{ik}, ∇_{ii} zu streichen. Zieht man endlich den allgemeinsten Fall in Betracht, daß auch die Urformen $f, g \ldots$ außer den (x) noch Zwischenvariabeln irgendwelcher Gattungen mit sich führen, so erleiden nach Forsyth (l. c.) nur die Aggregate ∇_{ik}, ∇_{ii} in (II′), (III′) eine gewisse Modifikation; die Identitäten (Va), (VIIIa) bleiben dieselben.

Dies überträgt sich wiederum auf den Fall mehrerer inkongruenter Variabelnreihen usw.

Somit gilt:

Satz XI. Die Identitäten (V′), (VIII), nebst sämtlichen daraus gezogenen Folgerungen, bleiben bestehen, auch wenn die invarianten Bildungen und die Urformen noch irgendwelche Zwischenvariabeln enthalten; man hat nur die Prozesse ∇_{ik}, ∇_{ii} durch die entsprechenden allgemeineren zu ersetzen.

[Druckfertig erklärt 27. VII. 1908.]

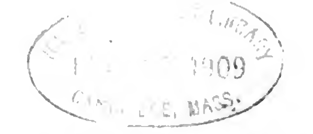
INHALT.

Seite

Heinrich Liebmann, Über die Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes. Mit 1 Figur im Text 176

W. Fr. Meyer, Über die Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen der Invarianten. Dem Andenken an SOPHUS LIE gewidmet 190

Druck von B. G. Teubner in Leipzig



BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

V.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1908.

Einzelpreis 1 Mark 60 Pfg.

SITZUNG VOM 20. JULI 1908.

Herr Neumann trägt vor: „Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche."

Herr Wiener übergibt für die Berichte eine Arbeit von Dr. Lilienfeld: „Über neuartige Erscheinungen in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung", und von Prof. Marx: „Über den Einfluß der Röntgenstrahlen auf das Einsetzen der Glimmentladung."

Herr Wiener trägt über eine für die Abhandlungen bestimmte Arbeit vor: „Der Zusammenhang zwischen den Angaben der Reflexionsbeobachtungen an Metallen und ihren optischen Konstanten."

Herr Credner legt den zehnten Bericht von Dr. Etzold über die Beobachtungen am Leipziger Seismometer für die Berichte vor.

Für die Herausgabe der Werke von L. Boltzmann wird ein Restbetrag von 350 *M* bewilligt.

Geschäftliche Mitteilungen.

Über neuartige Erscheinungen in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung.

(vgl. Verh. Deutsch. Phys. Ges. VIII, 10. November 1906, IX, 22. März 1907, sowie Phys. Ztschr. IX, 6, Januar bis März 1908.)

Das Potentialgefälle in Funktion der Stromdichte.

Von

J. E. Lilienfeld.

I.

Manche Umstände, insbesondere die von der nicht genügend vielseitigen Erfahrung nur mangelhaft gewährleistete Reproduzierbarkeit eines Teiles der in den oben angeführten Arbeiten beschriebenen Phänomene, veranlaßten das eingehende Studium des Potentialgefälles in der positiven Lichtsäule bei tiefem Vakuum in Funktion der räumlichen Koordinaten sowie der Stromdichte.

Es wurde bereits in der ersten der oben angeführten Mitteilungen festgestellt:

1) daß das Potentialgefälle von einem gewissen tiefen Drucke an bei abnehmendem Drucke steigt,

2) daß bei extremem, mit den äußersten Hilfsmitteln erreichbarem Vakuum das Potentialgefälle (für das der damaligen Erforschung zugängliche Gebiet) mit der Stromdichte zunimmt.

Diese beiden Tatsachen sind neu den für gewöhnlich an den Vakuumröhren beobachteten gegenüber.[1])

II.

Die von mir angewandte Methode war die der Messung der Potentialdifferenz zwischen feinen in die Achse der Entladung tau-

1) H. A. Wilson Proc. Camb. Phil. Soc. XI beschreibt bei sehr kleinen Stromdichten auch ein abweichendes Verhalten der Entladung bei mehreren mm-Druck, welches jedoch dem Wesen nach mit dem von mir beschriebenen nichts gemeinsames hat.

chenden Sonden 1, 2, 3, 4, 5, 6, (Fig. 1). Die Sonden sind bis auf die etwa 1 mm langen freien Enden möglichst fein mit Glas überzogen. Sie stehen vermittels Quecksilberkontakte mit der Elektrometerleitung in Verbindung. Zum Zwecke der besseren Isolation sind die feinen Röhren, in denen die Quecksilberkontakte liegen, ziemlich lang und unter Anwendung der üblichen Maßregeln mit Schellack überzogen. Die in der Figur angegebene Röhre gestattet die Messung bei einem Querschnitte von 10, 15, 20 mm. Die Entfernung der einzelnen Sondenpaare ist so gewählt, daß

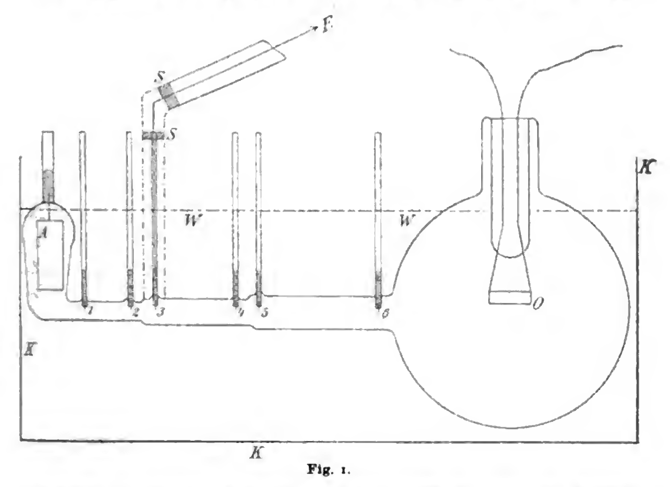


Fig. 1.

zwischen je zweien derselben ungefähr dieselbe Potentialdifferenz zustande kommt zu dem Zwecke, mit einem und demselben Elektrometer bei gleicher Empfindlichkeit die Messungen gleichartig ausführen zu können. Sonst besteht die Röhre aus der Kugel mit der Oxydkatode *O* und aus einer kleineren Erweiterung, welche die plattenförmige Aluminiumanode *A* enthält. Außer der hier angegebenen, aus Jena' Normalglas hergestellten Röhre wurden noch mehrere andere von der obigen nur durch den Entladungsquerschnitt und Sondenabstand verschiedene benutzt. So z. B. eine aus Thüringer Glas mit 14 mm Entladungsdurchmesser und vier Sonden, die je 40 mm voneinander entfernt waren, und zum Studium des Gefälles längs der Achse dienten.

III.

Um ein einigermaßen reproduzierbares *Vakuum* zu haben, wurde stets auf die äußerste, vermittels äußerst sorgfältiger Spülung mit chemisch reinem Sauerstoff und Adsorption durch Holzkohle bei der Temperatur der flüssigen Luft erreichbare Luftleere eingestellt. Da ich den Eindruck habe, als wäre man hier erst am Anfang eines neuen Gebietes, sollen die Versuche unter Anwendung weiterer technischer Hilfsmittel bei noch weiter vorgeschrittenem Vakuum fortgesetzt werden. Und zwar ergab es sich, daß für die in der Entladungsröhre herrschende Gasdichte durchaus nicht die Gasdichte über der kältesten Stelle, also hier über der Holzkohle, maßgebend ist. In einer eigens konstruierten Vorrichtung, in der bei etwa 7 Milliamp. Entladungsstrom eine Elektrodenspannung von etwa 2000—2500 Volt herrschte, stieg die Spannung bei der Kühlung des Entladungsrohres auf — 79° bis zu etwa 4000—4600 Volt, bei einer Kühlung auf — 180° bis zu 5000—6200 Volt; dabei wurden die Schwankungen der Zahlen von der Vorbehandlung der Röhre, der Kühlungsdauer und einigen anderen, vorläufig bestehenden Komplikationen bedingt. Immerhin ist obiges ein Beweis, daß die von den Gefäßwänden allein im Raume bedingte *partielle Gasdichte* bei dem vermittels Holzkohle und flüssiger Luft erreichbaren Vakuum bereits einen sehr bedeutenden Teil der *gesamten Gasdichte* ausmacht.

Über die *chemische Natur der Gasreste* gibt ein Taschenspektroskop Aufschluß in dem Sinne, daß das Spektrum bei ungekühlten Gefäßwänden im wesentlichen aus der von Wüllner (Ann. d. Physik VIII, 1879) beschriebenen Superposition des Sauerstoffbanden- sowie des Kohlenstoffbandenspektrums besteht, in den variabelsten Verhältnissen der relativen Intensität beider Komponenten; auch eine geringe Beimengung von Wasserstoff ist — manchmal nur eben noch — zu erkennen. — Bei der Kühlung der Wände des Entladungsgefäßes mit flüssiger Luft ging (es konnten zurzeit nur wenige Versuche dieser Art ausgeführt werden) die Helligkeit der erwähnten Spektren sehr stark zurück und das scharfe, bei weitem hervorragendste Helligkeitsmaximum des nunmehrigen Spektrums war in der Umgebung der *D*-Linien zu sehen.

Das Arbeiten mit tiefgekühlten Wänden der Entladungsröhre trifft vorläufig auf Schwierigkeiten. Deshalb sind nähere Mitteilungen über die hiermit gewonnenen Resultate momentan noch

nicht angängig. Die im Folgenden zu beschreibenden Versuche beziehen sich daher auf Röhren von der unter II. beschriebenen Art, und auf ein Vakuum, welches durch die Art des Auspumpens sowie durch die Angaben charakterisiert wird: die äußere Oberfläche des Kohlegefäßes befindet sich auf etwa — 180°, diejenige der Entladungsröhre auf einer Temperatur von über + 18°.

IV.

Zur Messung der Potentialdifferenz diente ein Quadrantenelektrometer in Doppelschaltung. Dasselbe war aus einem Mascart-Carpentier'schen Instrumente für die großen (bis 400 V.) Potentialdifferenzen umgebaut. Die bifilare Aufhängung an einem Platinfaden war durch veränderlichen Fadenabstand und veränderliche Belastung für verschiedene Empfindlichkeiten einzustellen. Die bei den großen Direktionskräften sehr wichtige Dämpfung war eine eigens konstruierte veränderliche Luftdämpfung, welche in allen Fällen die Aperiodizität der Schwingung zu erreichen gestattete.

Trotz der Unempfindlichkeit des Elektrometers war ein sorgfältiger elektrostatischer Schutz unvermeidlich, hauptsächlich wegen der bei hoher Spannung an den Leitungsdrähten auftretenden Büschelentladungen. Zu dem Zwecke tauchte die Röhre in einen Kasten aus paraffiniertem Holz K der bis zur Linie W mit Wasser gefüllt war. Die Quecksilbernäpfe wurden mit feinmaschigen Drahtnetzen, die von dem Schellackringe S in einer festen Lage gehalten wurden, umgeben. Das Netz war an den Erdschutz der Elektrometerleitung sorgfältig angeschlossen. Das Elektrometer, isoliert aufgestellt, mußte, da das Gehäuse auf dem Potentiale einer Sonde sich befand, ebenfalls in einen Erdschutz eingebaut werden.

Das Galvanometer war ein ebenfalls sorgfältig isoliert aufgestelltes Spiegelinstrument von Keyser & Schmidt (Empfindlichkeit 10^{-8} Amp.). Ein Vorschalt- und ein Nebenschlußwiderstand gestatteten die Messung in verschiedenen Bereichen.

Die Ablesung war bei beiden Instrumenten eine objektive, so daß auf zwei übereinander angebrachten Skalen beide Koordinaten zugleich beobachtet werden konnten.

Als Stromquelle diente mit gleichem Resultate eine Hochspannungsbatterie und eine Gleichstrommaschine. Die Widerstände waren metallisch bis 1. Megohm, von da an bis 1000 Megohm Amylalkohol-Jodkadmium.

V.

Die Resultate ergaben die in dem beigelegten Diagramm (Fig. 2, Aufnahme zwischen den Sonden 3 und 4 der Fig. 1) enthaltenen Gesetzmäßigkeiten. Dieselben sind zum Teile (insbesondere das Verhalten im Aste III und, wenn auch nicht in demselben Maße, im Aste II) dadurch bedingt, daß die Elektronen vor dem Eintritt in die der Messung dienenden Querschnitte eine hinreichende Geschwindigkeit erlangt haben, daß also die Sonden genügend weit von den Elektroden und der nächsten Querschnittsänderung entfernt sind.

Die Ordinaten des Diagramms sind Stromstärken, die Abszissen die Potentialquadrate (also sehr angenähert den direkten Elektrometerausschlägen proportional). Man sieht:

1. Für die benutzten Röhrenquerschnitte und Stromstärken von der Größenordnung von ungefähr einem Milliampère aufwärts bis zu Werten, wo die Röhrenwände sich merklich zu erhitzen anfangen, und die Möglichkeit eintritt, daß die nun erfolgenden Abweichungen durch Gasabgabe bedingt und die Erscheinungen dadurch getrübt sind, gilt das Gesetz:

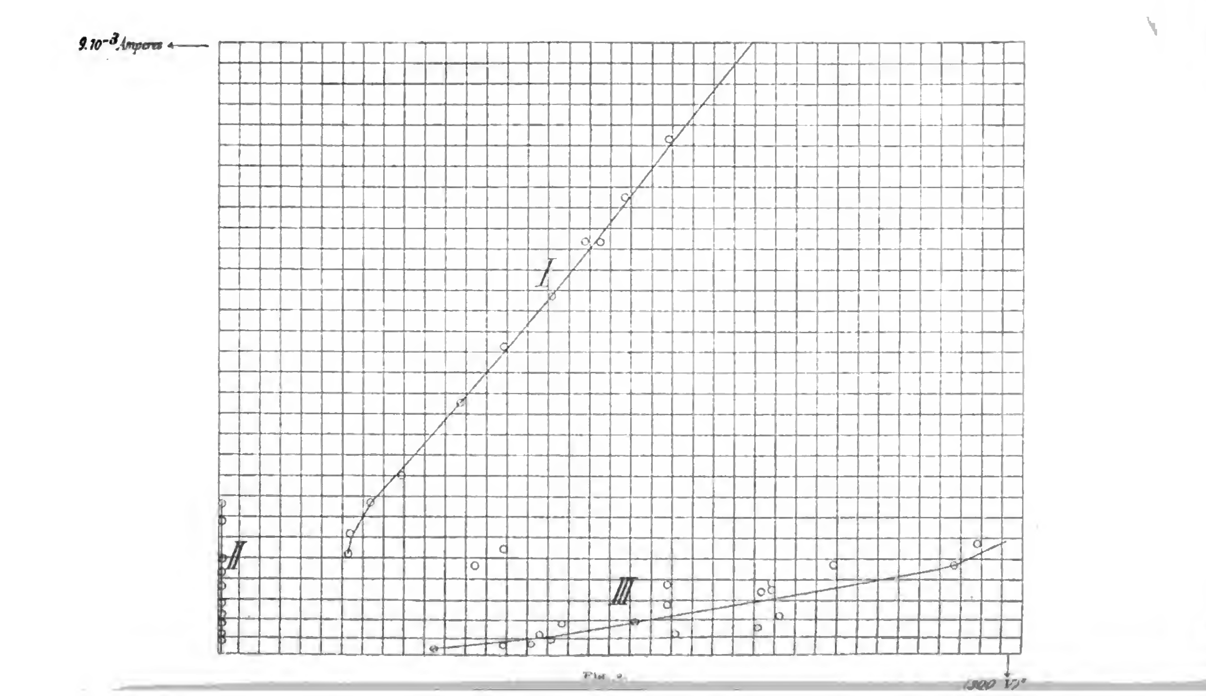
$$i = \alpha v^2 + \beta$$ [2])

das heißt der entsprechende Ast I des Diagrammes ist eine Gerade. Die dem obigen Gesetze gehorchende Form der Entladung ist bei dem zur Zeit erreichten Vakuum die beständigste. Zum Teile beziehen sich deshalb die Versuche und Überlegungen der vorliegenden Arbeit in erster Linie auf dieses Gesetz.

Der Übergang zu einer Charakteristik, die einen von dem obigen verschiedenen Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Stromstärke aufweist, vollzieht sich wie folgt:

2. sinkt die Stromstärke unter einen bestimmten, dem vorliegenden Gebiete angehörenden Wert, so ändert sich die Potentialdifferenz in den *Normalglasröhren* ruckweise. Am häufigsten kann die Feststellung eines Überganges mit den Vorschaltwiderständen und Spannungen von der verfügbaren Größe nicht durchgeführt werden. Nach der ruckweisen Änderung befindet man sich alsdann auf dem Aste II des Diagrammes. Oder vielmehr — es kann hier von einem bestimmten Linienzuge meistens nicht gesprochen werden, weil im Gegensatz zu dem Aste I die beobachteten Punkte ziemlich zerstreut liegen und eine ziemlich breite Fläche bedecken. — Besonders un-

2) Dieses Gesetz ist von mir bei einer anderen Gelegenheit bereits mitgeteilt worden. (Phys. Ztschr. IX; S. 193.)



9.10-3 Amperes
I
II
III

konstant sind die Elektrometerausschläge, da die relativ gute Konstanz der Stromstärke durch im Vergleich mit dem Röhrenwiderstand sehr große vorgeschaltete Widerstände verbürgt ist.

Die Mittelwerte der Elektrometerschwankungen liegen so, daß immerhin zunächst eine sehr geringe Änderung derselben mit der Stromstärke erfolgt, um dann eine rapide annähernd lineare Abnahme des Potentialquadrates mit abnehmender Stromstärke zu bedingen.

In den Röhren aus *Thüringer Glas* ist hingegen der Übergang von I auf II meistens gut ausgebildet, und zwar in der Gestalt einer Funktion, bei welcher eine Strom*zunahme Abnahme* des Potentialgefälles bedingt. — Dabei ist das Gebiet des Astes II nach den größeren Stromstärken zu desto ausgedehnter, je größer der Widerstand ist, den man einschaltet, um von I auf II zu kommen, und je plötzlicher dieses Einschalten besorgt wird.

Verfolgt man weiter die abnehmenden Stromstärken, so gelangt man schließlich zu:

3. dem Aste III der Kurve, wo bei einem für die benutzte Elektrometerempfindlichkeit verschwindend kleinem Gefälle die Entladung bestehen bleibt. Die Ausbildung dieses Astes war in Gefäßen aus Jena' Normalglas am deutlichsten.

VI.

Der Grund, warum von *Ästen* der Kurve gesprochen werden muß, ist der folgende. Einem jeden der Linienzüge kommt gewissermaßen eine selbständige Existenzberechtigung zu. Mit anderen Worten: befindet man sich auf einem der Kurvenäste, so kann man mit den Stromstärken unter Umständen ganz tief in das Gebiet der anderen Äste hineingeraten, bevor ruckweise der Übergang (zu einem anderen Aste) eintritt.

Es besteht also eine weitgehende *Metastabilität* der Zustände. Der Unterschied zwischen den einzelnen Glassorten in Bezug auf diese Metastabilität kann dreierlei Ursache haben:

a) die verschiedene Leitfähigkeit der Gläser und verschiedenes Reflexionsvermögen für weiche Kathodenstrahlen;

b) der verschiedene Partialdruck über der Glasoberfläche, der vermutlich hauptsächlich von den Verunreinigungen des Glases geliefert wird;

c) die chemisch verschiedene Beschaffenheit des den Partialdruck liefernden Gases.

Versuche, die einer weiteren Mitteilung vorbehalten bleiben, lassen den unter b) erwähnten Grund, sowie den unter c) in zweiter Linie für den Unterschied im Verhalten der Glassorten als wahrscheinlich erscheinen. Auch soll die Frage, inwiefern die zurzeit unvermeidlichen Isolationsfehler, besonders in der Gestaltung des Astes II, eine Rolle spielen, erst auf Grund eines umfangreicheren Materials entschieden werden.

VII.

Der Potentialabfall an der Oxyd*kathode* beträgt wenige Volt, je nach dem Zustande der Kathode, und nimmt durch das Erhöhen des Vakuums gegen das sonstige nicht merklich zu. Die Verhältnisse an der *Anode* müssen einem besonderen Studium vorbehalten bleiben. Die Verteilung des Potentialgefälles *längs der Entladungsachse der Lichtsäule* ist für den Ast I sehr annähernd bei konstantem Querschnitt linear. Genauer formuliert: das Gefälle wächst bei konstantem Querschnitt *nach der Anode zu* und nähert sich bei (in dem behandelten Gebiete) fortschreitender Evakuation sehr einer linearen Verteilung. Dadurch ist es gerechtfertigt, die Benennung „positive Lichtsäule“ bei dem extrem hohen Vakuum beizubehalten.

Man muß dabei nur die unvermeidlichen Änderungen des Röhrenquerschnitts durch die Sonden, sowie den Umstand beachten, daß man sich genügend weit von der nächsten Röhrenerweiterung bzw. Verengung befindet. — Die Bestimmung der Verteilung *quer* zur Achse ist mit den angewandten Methoden unausführbar, jedoch scheint es dem Aussehen der Entladung bei größeren Stromdichten nach (bei den zur Messung benutzten Stromstärken ist von der Gasluminizenz kaum etwas zu sehen), als ob die größte Stromdichte in der Umgebung der Achse verliefe.

Die Funktion des Röhrendurchmessers ist an drei Querschnitten (10, 15, 20 mm) aufgenommen worden und zeigt für den Ast I, daß die Potentialgefälle für gleichen Sondenabstand sich verhalten wie 6,2 : 3,8 : 2,8, also annähernd den Röhrendurchmessern umgekehrt proportional sind, mit der Tendenz zu einer schnelleren Zunahme bei kleineren Querschnitten.

VIII.

Die Deutung der Resultate ergibt zunächst die Möglichkeit, das Gesetz des Astes I unter Zuhilfenahme einer plausibelen Vorstellung in folgender Weise abzuleiten.

Es sei i der bei dem hohen Vakuum durch die Kathoden-

strahlen transportierte elektrische Strom. Dann ist mit großer Annäherung anzunehmen, daß i dem Gesamtstrome gleich ist.[3])

Eine Änderung di wird dann dadurch hervorgerufen, daß die Menge der in der Zeiteinheit durch den Querschnitt hindurch tretenden Elektronen wächst — infolgedessen wächst auch ihre räumliche Dichte n um dn. Nimmt man ferner die Annahme zu Hilfe, daß die Verteilungen der das Potentialgefälle v im Raume bedingenden Ladungen bei verschiedenen Stromstärken einander ähnlich sind, so wird

$$dv = a \cdot dn. \tag{1}$$

Nun ist aber die Stromzunahme di sowohl der Zunahme der Elektronenmenge dn, als auch der Geschwindigkeit derselben, also auch — (infolge der in V erwähnten linearen Verteilung des Gefälles) — dem Potentialgefälle, direkt proportional: $di = b \cdot v \cdot dn$ oder nach (1)

$$di = \frac{b}{a} v \cdot dv.$$

Setzt man $\frac{b}{a} = 2\alpha$, und führt eine für den Gang der Überlegung irrelevante Integrationskonstante β ein, so erhält man schließlich

$$i = \alpha v^2 + \beta.$$

IX.

Die gegebene Ableitung ist jedoch weit davon entfernt, einen Einblick in das Wesen der beschriebenen Phänomene zu gewähren. In erster Instanz ist es die in IV erwähnte lineare Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse, die zunächst unverständlich bleibt. Der direkt aus dieser Tatsache sich ergebende Schluß ist nämlich, daß die in einem Volumen verbrauchte elektrische Energie *nicht* den in geordneter Bewegung von der Kathode nach der Anode, den Strom transportierenden Elektronen als Zuwachs ihrer kinetischen Energie auf den weiteren Weg mitgegeben wird. Im Gegenteil, diese verbrauchte elektrische Energie wird in dem betreffenden Volumen selbst vollständig in ungeordnete Bewegung (Erhitzung der Röhrenwände) umgesetzt. Denn würde die Energie zu einem merklichen Teile zur Beschleunigung der stromtransportierenden Elektronen verwendet werden, so müßte offenbar bei gleichem Röhrenquerschnitte das Potentialgefälle (absolut leeren Raum vorausgesetzt) nach der

3) Diese — einfachste — Annahme kann, wie leicht ersichtlich, mit gleichem Erfolge auch durch eine andere, welche *keine* unipolare Leitung verlangt, ersetzt werden.

Anode zu beträchtlich *abnehmen*, während nach Absatz V das Potential in diesem Sinne eher *zunimmt*.

Es frägt sich nun, warum bei dem extrem vorgeschrittenen Vakuum und der die Dimensionen des Gefäßes unter normalen Umständen bei weitem übertreffenden freien Weglänge der stromtransportierenden Elektronen große Energiemengen in ungeordnete Bewegung umgesetzt werden müssen, wenn die Stromleitung aufrecht erhalten werden soll. — In diesem Zusammenhange ist es wohl nicht viel mehr als eine *Beschreibung* der Tatsachen, wenn man zusammenfassend sagt: Die mittlere freie Weglänge der Elektronen ist hier ungleich viel kleiner, als dieselbe in Funktion des Gasdruckes allein sich ergeben würde.

Es sei hierbei bemerkt, daß Versuche mit Schattenobjekten (da sie hier nicht ohne weiteres einwandfrei gemacht werden können), immerhin Resultate ergaben, die mit obigem Satze *nicht* im Widerspruch stehen.

X.

Das die Versuche zusammenfassende Diagramm vermag einige Aufschlüsse über die oben gegebene Deutung zu liefern. Geht man nämlich, bei kleinen Stromstärken anfangend, auf dem Aste III zu größeren Stromstärken über, so sieht man, daß bei einer gewissen Stromstärke ruckweise ein Übergang zum zweiten Aste stattfindet. Die Entladung die auf dem Aste III mit minimalem Potentialgefälle verlief, bedingt nunmehr, nachdem man einmal einen kräftigen Strom einschaltete, und dann zu dem ursprünglich kleineren zurückging, unter sonst gleichen Umständen ein sehr bedeutendes Potentialgefälle.

Nimmt man, was naheliegend ist, an, daß durch den kräftigeren Strom eine Ionisation durch Stoß eingeleitet wurde, so hat man das zunächst merkwürdige Ergebnis, daß durch die Erzeugung von Ionen im Volumen das Gefälle auf ein *Vielfaches* seines ursprünglichen Wertes vergrößert wird. Die einzig mögliche Deutung in Verbindung mit dem im Absatz VII Gesagten, falls man an der Annahme der Ionisation festhält, ist, daß durch die letztere die mittlere freie Weglänge der Elektronen sehr bedeutend verringert wird.

Es ergäbe sich demnach die Auffassung, die ich zunächst als *Arbeitshypothese* hinstellen möchte, daß der im Vergleiche mit der Wirkungssphäre eines nichtionisierten Moleküls sehr große Aktionsradius eines Ions (langsamen) Kathodenstrahlen gegenüber bei dem hohen Vakuum derartig zur Wirkung gelangt, daß eine außerordent-

liche Verringerung der freien Weglänge der Kathodenstrahlen erreicht wird.

Die Ansicht, daß ein extrem verdünntes Gas, wenn es weitgehend ionisiert ist, eine große Absorptionsfähigkeit für Kathodenstrahlen erwirbt, hat den Vorzug, die lineare Potentialgefälleverteilung längs der Achse zugleich mit der eigenartigen Beschaffenheit der Kurven zu erklären[4]. Die Erwärmung der Gefäßwände wäre dann hauptsächlich auf die an den Gasresten hervorgerufenen Sekundärstrahlungen zurückzuführen. Ein Studium der — im vorliegenden Falle einer eingehenden Messung zugänglichen — thermischen Verhältnisse würde demnach dieser Auffassung zufolge gleichbedeutend mit der Bearbeitung der heute offenen Frage nach der Herkunft der Energie der Sekundärstrahlungen sein. — Hierbei ist es beachtenswert, daß, so lange wie die gefundenen Gesetze wesentlich bestehen bleiben, man bei zunehmender Gasverdünnung — unter sonst gleichen Umständen — auf einen sehr schnellen Anstieg der pro Molekül und Zeiteinheit umgesetzten Energiemenge schließen müßte.

Jedenfalls ist aber die entwickelte Ansicht einer ausführlichen und klar entscheidenden experimentellen Prüfung fähig, und zwar gibt sie, wie leicht einzusehen, zu sehr vielseitigen Experimenten Veranlassung.

Die zweite mögliche Auffassung hingegen, daß die beschriebenen Erscheinungen *nicht* mit den Gasresten causal zusammenhängen, hat fürs erste eine kleinere Wahrscheinlichkeit.

Die Hilfsmittel zu meinen Untersuchungen sind zum großen Teile aus dem mir in dankenswerter Weise von der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig aus der Härtelstiftung überlassenen Fond bestritten worden.

Schließlich möchte ich Herrn Geheimrat Prof. O. Wiener für das liebenswürdige Entgegenkommen auch an dieser Stelle meinen tiefempfundenen Dank aussprechen.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität,
den 15. Juli 1908.

---

4) Dieses ist für den Ast I und III ohne weiteres verständlich. Obwohl nun auch der Ast II sich in den Zusammenhang einreihen läßt, soll dies erst ausgeführt werden, wenn der Einfluß der im Absatze VI angeführten Ursachen auf die Entladung klargelegt sein wird.

Druckfertig erklärt 3. X. 1908.]

Zehnter Bericht der Erdbebenstation Leipzig.

$51^0\,20'\,6''$ nördl. Br., $49^m\,34^s$ östlich von Greenwich.

I. Die in Leipzig und Plauen vom 1. Januar bis 30. Juni 1908 aufgezeichneten Seismogramme.

II. Die in Leipzig vom 1. Januar bis 30. Juni 1908 aufgezeichneten pulsatorischen und sonstigen nicht seismischen Bewegungen.

Von

FRANZ ETZOLD.

In dem Halbjahr vom 1. Januar bis 30. Juni 1908 wurden durch WIECHERTS Pendelseismometer in Leipzig 59 Erdstöße aufgezeichnet, über welche der vorliegende zehnte Bericht der Erdbebenstation Leipzig in derselben Weise wie die an dieser Stelle seit 1902 veröffentlichten neun vorhergehenden Auskunft gibt. Unter den bekannt gewordenen Epizentralgebieten der registrierten Erdstöße ist diesmal auch Sachsen vertreten, indem sich daselbst und zwar im sächsisch-böhmisch-bayrischen Grenzgebiet in der Frühe des 4. Februar zwei Erdstöße ereignet haben, die in einem ziemlich großen Bezirk für Menschen fühlbar waren, sich mikroseismisch aber auch noch in Leipzig deutlich bemerkbar machten. In außerordentlicher Zierlichkeit und Schärfe wurde in unserer Station ferner die Erbebung verzeichnet, welche in der Nacht vom 19. zum 20. Februar die Bewohner Wiens erschreckte. Am imposantesten aber von allen in der Berichtszeit erhaltenen Seismogrammen sind diejenigen aus den frühesten Morgenstunden des 27. März. Dieselben rühren von dem heftigen Erdbeben her, dem in 10000 km Entfernung die mexikanische Stadt Chilapo zum Opfer fiel. Dasselbe reiht sich also den gewaltigen seismischen Ereignissen an, deren Wellen im Laufe der letzten Jahre von der Westküste Nord- und Südamerikas und aus Zentralamerika zu uns gelangt sind, nämlich den Beben von Quezaltenango, 19. April 1902, von British Hon-

duras, 23. September 1902, von Esmeraldas in Ecuador, 31. Januar 1906, von San Francisco, am 18. April 1906, von Valparaiso, am 17. August 1906, und von Chilpancingo (Staat Guerrero in Mexiko), am 15. April 1907. Vollständige Ruhe scheint während des ersten Halbjahres 1908 in dem großen chronischen zentralasiatischen Schütterareal geherrscht zu haben. Mit den im vorliegenden Bericht aufgezählten steigt die Zahl der in Leipzig seit dem 28. März 1902 zur Registrierung gelangten Erdbeben auf 516.

Vor größeren Betriebsstörungen ist die Erdbebenstation Leipzig in der Zeit vom Januar bis Juni 1908 bewahrt geblieben, nur vom 2. bis 4. Februar, 15. bis 16. März und 6. bis 7. April stockte zeitweise das Triebwerk für das Registrierpapier. Absichtlich wurde die Beobachtung in der zweiten Hälfte des Juni (vom 23. an) unterbrochen, um den Apparat zu reinigen, einige Bequemlichkeiten für seine Bedienung anzubringen und den ganzen Raum mit einem wasserdichten Anstrich zu versehen. Solange während dieser baulichen Veränderungen der schützende Glaskasten vom Seismometer entfernt war, erwies es sich — auch während der Nachtzeit — als zwecklos, die Registrierung fortzusetzen, in solch hohem Grade störend wirkte der Luftzug auf die stationäre Masse ein.

Das kleinere, in Plauen stehende Seismometer hat wie bisher die kräftigeren Fernbeben gleichfalls verzeichnet und auch die beiden vogtländischen Stöße, die übrigens in Plauen von Menschen nicht gefühlt wurden, registriert. Diese letzteren beiden Seismogramme sind aber derartig schwach ausgefallen, daß sich für die Zukunft auf Grund dieser Erfahrung eine weitere Steigerung der Indikatorvergrößerung nötig macht, und zwar soll dieselbe in nächster Zeit auf 100 gebracht werden.

I. Die in Leipzig und Plauen vom 1. Januar bis 30. Juni 1908 aufgezeichneten Seismogramme (S. 227).

In der tabellarischen Zusammenstellung sind folgende Abkürzungen, welche denen der „Göttinger wöchentlichen Erdbebenberichte" entsprechen, angewendet worden.

Charakter des Erdbebens.

a) In bezug auf die Stärke seiner Aufzeichnung.

I = merklich,
II = auffallend,
III = stark.

b) In bezug auf die Lage des Herdes zum Beobachtungsort.

d = Ortsbeben (terrae motus domesticus), am Orte fühlbar.
v = Nahbeben (terrae motus vicinus), unter 1000 km.
r = Fernbeben (terrae motus remotus), 1000 bis 5000 km
u = sehr fernes Beben (terrae motus ultimus), über 5000 km.

Es bedeutet hiernach z. B. „I*u*“: Ein sehr fernes Erdbeben hat sich so aufgezeichnet, daß die Registrierlinien durch die seismischen Schwingungen merklich gewellt erscheinen, daß also die Schreibnadeln um Beträge von etwa 1 mm zur Seite geführt worden sind.

Phasen.

P = erste Vorläufer (undae primae).
S = zweite Vorläufer (undae secundae).
L = Hauptbeben (undae longae).
M = besonders große Bewegungen im Hauptbeben (undae maximae).
C = Nachläufer (coda).
F = Erlöschen der sichtbaren Bewegung (finis).

Art der Bewegung.

i = Einsatz (impetus).
e = allmähliches Auftauchen (emersio).

Demnach bedeutet z. B. „*Pi*“: Der erste Vorläufer setzt scharf mit einer Schwingung von meßbarer Größe ein, dagegen bedeutet „*Le*“: Die langen Wellen des Hauptbebens entwickeln sich allmählich aus denen des zweiten Vorläufers (*S*), so daß man keine scharfe Abgrenzung zwischen beiden Phasen machen kann.

Maße der Schwingungen.

P bedeutet die Periode oder die doppelte Schwingungsdauer, dieselbe wird nach Sekunden angegeben.

A ist die Amplitude der Erdbewegung (Maß der wirklichen Bodenbewegung am Standorte des Seismometers), gerechnet von einer Seite zur anderen. A_{NS} ist die Amplitude für die Nordsüdkomponente, A_{OW} die Amplitude für die Ostwestkomponente. Als Grundmaß dient hier das Mikron (μ) = 0,001 mm.

II. Die in Leipzig vom 1. Januar bis 30. Juni 1908 aufgezeichneten pulsatorischen und sonstigen nicht seismischen Bewegungen.

In Tabelle II, S. 239, sind die Amplituden (A) und Perioden (T) der während der Berichtszeit vom Leipziger Seismometer aufgezeichneten pulsatorischen Bewegungen zusammengestellt worden. Aus derselben ist ersichtlich, daß jene schwachen langandauernden Bewegungen auch im vergangenen Halbjahr nur während weniger Nächte gefehlt haben. Mehrmals erlangten sie eine beträchtliche Energie und machten sich auch tagsüber so deutlich bemerkbar, daß seismische Wellen durch sie stark gestört wurden. So erreichten sie am 28. Januar bei 8 bis 10 Sekunden langen Perioden Schwingungsweiten von 2 bis 8 μ. Am 6. Februar besaßen sie 6 Sekunden lange Perioden und Amplituden von 1 bis 2 μ, am 7. wuchsen erstere auf 8 bis 9 Sekunden, letztere auf 2 bis 5 μ an. Vom 22. bis 29. Februar fehlten sie mit Perioden von 7 bis 8,5 Sekunden Dauer und Amplituden von 1 bis 5 μ an keinem Tage. Auch am 9. und 10. März hielten sie tagsüber an (6 bis 7 Sekunden Periode, 1 bis 1,5 μ Amplitude), waren am 23. März von beträchtlicher Stärke (8 Sekunden Periode und 2,5 μ Amplitude) und erschienen endlich für die Berichtszeit während der Tagesstunden zum letzten Male deutlich am 28. und 29. März (7 bis 8 Sekunden Periode, 1 bis 2 μ Amplitude).

Sind die pulsatorischen Bewegungen durch ihr langes Anhalten in gleicher Intensität sofort von seismischen Wellen zu unterscheiden, so schreiben sich Gewitterböen manchmal recht seismogrammähnlich auf, langanhaltender Sturm aber verwischt die seismischen Wellen bis zur vollkommenen Unkenntlichkeit. Die Störungen durch Sturm waren im vergangenen Halbjahr am kräftigsten in den Nächten vom 6. zum 7., vom 26. zum 27. und vom 31. Januar zum 1. Februar, ferner am 9., 16. und 19. Februar. In ganz auffallende Unruhe geriet das Pendel schließlich am 22. Mai durch Gewitter in den Morgenstunden und noch mehr in den Abendstunden, in welch letzteren Leipzig von heftigen, teilweise mit Hagelschlag verbundenen Gewittern heimgesucht wurde.

Erdbebenstation des paläontologisch-geologischen Instituts Leipzig.
20. Juli 1908.

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
1.	5. Jan.	*Iu*	*Le*	0 14 0				Aus den Pulsationen tauchen namentlich bei der Ostwest-Komponente lange flache Wellen hervor.
			M_{OW}	0 16 30	18		1	
			F	0 30 —				
2.	5. Jan.	*Iu*	*e*	3 35 —				Lange flache Wellen.
			M	3 59 40	18	1,5	1	
			F	4 34 —				
3.	5. Jan.	*I*	*e*	15 44 20	0,5	< 1		Auf minimale Zitterbewegungen folgen vereinzelte flache Wellen.
			M	15 51 10	12	< 1	< 1	
			F	15 58 —				
4.	11. Jan.	*IIu*	*P*	4 47 18	< 1	< 1	< 1	Weder die Vorläufer noch das Hauptbeben setzen scharf ein. In *Plauen* registriert, Wellen mit 15—20 Sekunden langen Perioden ohne scharfe Einsätze.
			S	4 57 30	20		19	
			Le	5 15 —				
			M_I	5 21 45	18	95	75	
			M_{II}	5 24 55	15	88	76	
			C		15—12			
			F	7 — —				
5.	15. Jan.	*IIu*	*Pi*	14 9 28	< 1	< 1	< 1	Die ersten Vorläufer beginnen mit scharfem Einsatz, die weitere Phasengliederung ist zeitlich nicht genau durchzuführen. Das Ende fällt in den Papierwechsel. In *Plauen* registriert. Scharfe Einsätze fehlen, die aufgezeichneten Wellen haben im Mittel 12 Sekunden lange Perioden.
					3	2	1,5	
			Se	14 19 40	9	1,5	1,5	
			Le	14 40 10				
			M_I	14 43 30	18	35	38	
			M_{II}	14 45 22	15	33	30	

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
5.	15. Jan.	*II u*	M_{III}	14 49 50	15	38	20	
			C		15—12			
			F	15 19 —(?)				
6.	25. Jan.	*I v*	*P*	4 27 35				Infolge einer Nullpunktverlegung sind bei der *NS*-Komponente die Linien durch einander gelaufen, so daß die scharfe, aber schwache Erdbebenaufzeichnung bei ihr nicht aufzufinden ist.
			L	4 28 31	2		<1	
			F	4 29 —				
7.	27. Jan.	*I*	*Le*	17 31 45				Die Vorläufer werden durch starke, nicht seismische Störungen vollkommen verdeckt.
			M	17 39 40	12	6	16	
			F	18 — —				
8.	31. Jan.	*Ir*	*P*	5 56 53				
			L	6 10 56				
			M	6 14 20	14	9	8	
			F	6 20 —				
9.	1. Febr.	*I*	*Se*	0 35 50	14		4	Die ersten Vorläufer werden durch Pulsationen verdeckt. Es zeichnen sich lauter flache, möglicherweise von mehreren Fernbeben herrührende Wellen auf. Vielleicht ist der Beginn der Hauptphase eines solchen schon auf 0 h 41 m zu legen.
			Le	0 53 35	24		16	
			M_I	0 58 35	25	25	35	
			M_{II}	1 6 45	20	22	38	
			M_{III}	1 10 45	19		17	
			F	1 48 —				
10.	4. Febr.	*I v*	*i*(?)	6 3 13				Ebenso wie No. 11 im sächsisch-böhmisch-bayrischen Grenzgebiet gefühlt.
			L	6 3 22	<1	<1	<1	
			F	6 3 50				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
11.	4. Febr.	*Iv*	*i* (?)	6 12 42				Auf dem *Plauen*schen Registrierstreifen sind No. 10 u. 11 als schwächste, nur mit guter Lupe erkennbare Erzitterungen aufgeschrieben worden.
			L	6 12 51	<1	<1	<1	
			F	6 13 30				
12.	6. Febr.	*Iu*	*L*	0 4 —				Zwischen den Pulsationen machen sich einige lange, sehr flache Wellen bemerklich.
			F	0 9 —				
13.	9. Febr.	*Iu*	*Le*	5 8 35				Lange flache Wellen, bei der *NS*-Komponente durch Wind erheblich gestört.
			M_I	5 11 30	20		14	
			M_{II}	5 14 30	20		8	
			F	5 36 —				
14.	9. Febr.	*Iu*	*Pe*	19 24 —	<1		<1	Bei der *NS*-Komponente sind die aufgezeichneten Wellen durch Wind erheblich gestört. In *Plauen* in Gestalt schwacher Wellen mit 20 Sekunden langen Perioden registriert.
			i	19 26 7	3,5		1	
			i	19 28 2	3,5		<1	
			S	19 32 47	6,5	4		
				19 33 15	10		1,5	
			Le	19 50 20				
			M_I	19 51 42	24		53	
			M_{II}	19 53 15	17		27	
			M_{III}	19 58 12	16		34	
			C		15 — 12			
			F	20 50 —				
15.	14. Febr,	*I*	*S*	10 16 40	9		5	Der Anfang der Hauptphase und das Ende sind durch Arbeiten im Seismometerraum verloren gegangen.
			M	10 31 —	15		5	

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
16.	16. Febr.	*Iv*	*e*	2 11 15				Über die Pulsationen lagern sich rasche Schwingungen.
			M	2 12 —	0,75	< 1	< 1	
			F	2 14 —				
17.	19. Febr.	*Iv*	*P*	22 12 12				In *Wien* gefühlt. Der erste Einsatz ist nur bei der *OW*-Komponente deutlich, die folgenden Phasen sind dagegen bei der *NS*-Komponente schärfer erkennbar. In *Plauen* registriert. Allmählich anschwellende Vorphase, dann scharf einsetzende, auffallend kräftige Hauptphase.
			i	22 12 49	1		2	
			L	22 13 2				
			M_I	22 13 9	1,5	18	15	
			M_{II}	22 13 18	1,75	20	17	
			F	22 17 40				
18.	23. Febr.	*Iv*	*e*	20 51 33				Schwächste rasche Zitterbewegungen lagern sich über die Pulsationen.
			M	20 51 40	0,75		> 1	
			F	20 52 15				
19.	1. März	*Iu*	*e*	22 4 30	18	2	2	Wenige sehr schwache lange Wellen.
			F	22 11 30				
20.	2. März	*Iu*	*Le*	17 10 50				Von Vorläufern ist nichts erkennbar.
			M	17 13 20	18	4	4	
			F	17 30 —				
21.	2. März	*Iu*	*e*	22 10 —				Flache Wellen.
			M	22 14 30	18		2	
			F	22 30 —				
22.	4. März	*Iu*	*Le*	1 4 —	15	< 1	< 1	
			F	1 23 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	*OW*	Bemerkungen
23.	5. März	*II u*	*P*	3 30 58	<1	<1	<1	
			S	3 41 38	9		3	
			Le	4 5 —				
					ca. 40			
			M_I	4 12 20	27	105	95	
			M_{II}	4 19 30	20	44	65	
			M_{III}	4 24 15	19	40	51	
			C		18—15			
			F	6 — —				
24.	12. März	*I r*	*P*	20 34 6	3,5		1,5	Eine deutliche Phasengliederung ist nicht nachweisbar. Das Hauptbeben wie die zweiten Vorläufer bestehen aus wenig regelmäßigen Wellen mit 6—7 Sekunden langen Perioden. Die längsten haben sich von 20 h 44 m — 20 h 45 m aufgezeichnet.
			i	20 36 10	4		3	
			L	20 43 45	7		1	
			F	21 3 —				
25.	14. März	*I r*	*Se*	20 36 —				
			M	20 40 —	9	2,5	2,5	
			F	21 — —				
26.	15. März	*I v*	*P* (?)	8 41 19	<1		<1	
			Le	8 41 38				
			M	8 41 40	1		1	
			F	8 43 —				
27.	15. März	*I u*	*Pe*	10 30 20	<1	<1	<1	Nach den scharf gezähnelten ersten Vorläufern und den flachen Wellen der zwei Minuten später folgenden Wellengruppe sieht man nur hin und wieder ganz flache Wellen. 11 h 38 m folgt eine Gruppe derartig äußerst flacher Wellen mit etwa 24 Sekunden langen Perioden und darauf wieder vereinzelte, die noch anhalten, als die ersten Vorläufer des folgenden Bebens einsetzen.
			i	10 32 20	7		0,8	
			M	ca. 11 36 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
28.	15. März	*I*	*P*	12 19 30	1 — 1,5	3	3	An die ersten zwei kurzen Wellen schließen sich direkt die gleichfalls kurzen kräftigsten, später folgen solche mit 4—6 Sekunden langen Perioden, die von Pulsationen nicht unterschieden werden können. Eine Phasengliederung ist völlig unmöglich. Vielleicht sind die aufgeschriebenen scharfen Wellen die ersten Vorläufer eines Fernbebens, dessen weitere Phasen den Seismometerstandort nicht mehr erreicht haben.
			F	12 27 —				
29.	19. März	*Iu*	*Pe*	4 19 —	< 1	< 1	< 1	Auf die ersten Vorläufer folgen nur hin und wieder leichte Wellen, die relativ kräftigsten etwa 5 h 23 m, völlige Ruhe tritt erst gegen 6 h ein. Die ganze Aufzeichnung ist so flach, daß keinerlei sichere Zeitbestimmung oder Messung möglich ist.
			F	6 — —				
30.	24. März	*Iu*	*Le*	14 23 —	30			Durch Tagesstörungen und Wind erheblich beeinträchtigt und verwischt.
			M	14 29 30	24		32	
			F	15 — —				
31.	25. März	*Iu*	*Le*	20 36 50	30			
			M	20 41 40	24		15	
			F	21 10 —				
32.	27. März	*IIIu*	*P*	0 16 22	12	8	13	Herdentfernung fast 10 000 km. Zerstörendes Beben in Chilapo (Mexiko). In *Plauen* registriert mit der Leipziger Aufzeichnung entsprechender Gliederung.
			i	0 19 55	14	28	58	
			S	0 27 3	17	60	90	
			i	0 28 30	19		250	
			L	0 45 8	20		76	
			M_I	0 53 2	22	260	350	
			M_{II}	0 55 37	20	200	310	
			M_{III}	1 0 19	17		240	

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
	27. März	*III u*	*C*		20—15			
			F	4 — —				
33.	27. März	*II u*	*P*	5 0 22	ca. 1	< 1	< 1	Epizentralgebiet in Mexiko. In *Plauen* registriert, wenige Wellen mit 20 Sekunden langen Perioden.
					7		2	
			i	5 3 49	10	3	4	
			S	5 10 51	11		4,2	
			L e	5 28 45				
				5 34 0	30		72	
			M_I	5 37 —	25	54	80	
			M_{II}	5 43 45	20	33	75	
			C		20—12			
			F	7 — —				
34.	1. April	*I*	*L e*	10 16 30				Seismische Wellen machen sich infolge der starken Tagesstörungen nur undeutlich bemerkbar.
			M	10 17 20				
			F	10 25 —				
35.	2. April	*I u*	*L e*	7 23 —				Von den Vorläufern ist wegen der Tagesstörungen nichts zu erkennen, auch der Anfang der Hauptphase hebt sich nur schwach hervor.
			M	7 30 —	12	14	12	
			F	7 53 —				
36.	4. April	*I u*	*e*	7 50 —				Wegen der Tagesstörungen sind nur wenige flache Wellen zu erkennen, die augenscheinlich Maxima der Hauptphase eines Fernbebens darstellen.
				7 52 20	23	7		
				7 58 10	11			
			F	8 20 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
37.	10. April	*I*	*P*	1 5 45	3	<1	<1	Auf eine Gruppe leichter Wellen, mit im Mittel drei Sekunden langen Perioden, folgen ganz vereinzelt längere sehr flache Wellen.
					12	1	1	
			F	1 33 —				
38.	16. April	*Ir*	*Pe*	17 46 30				Die ersten Vorläufer machen sich ganz langsam bemerklich, die zweiten aber setzen scharf ein.
			i	17 49 21	5	1,5	3	
			Si	17 52 41	9	6	3,6	
			i	17 56 12	12	12	4	
			Le	18 59 30				
			M	19 10 —	12	9		
			C		8—6			
			F	19				
39.	19. April	*Iu*	*Pi*	9 9 33	4	2,5	2	Die ersten und zweiten Vorläufer setzen scharf ein, der Anfang der Hauptphase aber ist nicht sicher zu erkennen.
			Si	9 18 24	9	10	14,5	
			M	9 29 30	20	15	20	
			F	10 44 —				
40.	21. April	*Iu*	*e*	16 51 15				Wind- und Tagesstörungen erschweren das Erkennen der seismischen Wellen.
			M	16 53 50	26	9	12	
			F	17 15 —				
41.	22. April	*Iu*	*e*	1 1 10	<1	<1	<1	Die Hauptphase besteht aus schönen regelmäßigen Wellenzügen.
			Si	1 10 18	7		2,5	
				1 16 44	24	33	30	
			Le	1 31 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (M E Z) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
41.	22. April	*I u*	M_I	1 36 46	28		32	
			M_{II}	1 41 30	20	30	19	
			C		20—15			
			F	2 27 —				
42.	23. April	*I u*	*e*	2 55 30				Die langen flachen Wellen dürften nicht zum vorigen Beben gehören, da ihre Perioden wesentlich länger sind, als die ausklingenden Wellen von No. 41.
			M	3 30 30	24	16	10	
			F	4 30 —				
43.	26. April	*I u*	*e*	23 36 10				Sehr flache Wellen.
			M	23 39 30	20	5	2	
			F	23 53 —				
44.	27. April	*I u*	*e*	6 37 50				
			M_I	6 38 30	20	5	9	
			M_{II}	6 44 40	16		4	
			F	6 52				
45.	28. April	*I*	*e*	18 27 30	12	2	1,7	
			F	18 31 —				
46.	3. Mai	*I u*	*P*	2 0 38	<1	<1	<1	Flache regelmäßige Wellen in der Hauptphase.
					3,5		1	
			S	2 10 20	7	3		
			L e	2 19 —				
			M_I	2 31 33	25	12	25	

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ NS	Amplituden μ OW	Bemerkungen
	3. Mai	*Iu*	M_{II}	2 37 8	20	22	38	
			C		15—8			
			F	3 30 —				
47.	5. Mai	*IIu*	*e*	7 35 —				Die ersten Vorläufer sind wegen der Tagesstörungen nicht erkennbar.
			i	7 42 28	7		2,5	In *Plauen* in Gestalt langer flacher Wellen registriert.
			S	7 43 32	11	5		
			e	7 51 27	30		48	
			e	7 55 27	30		44	
			Le	8 8 25				
				8 10 16	40		125	
			M_I	8 14 40	23	120	150	
			M_{II}	8 19 50	23	60	85	
			C		20—15			
			F	9 15 —				
48.	5. Mai	*I*	*e*	12 25 10				Eine sehr schwache Aufzeichnung. Während der unmeßbar flachen, langen Hauptphasenwellen hat sich die stationäre Masse allmählich gegen die Arretierschrauben gelegt, infolgedessen ist über den weiteren Verlauf nichts zu ermitteln. Bei der *NS*-Komponente sind die Linien durcheinander gelaufen.
			e	12 41 50	21		10	
			M	13 2 40	18		7,5	
			F (?)					
49.	9. Mai		*e*	15 43 —				Die ziemlich regelmäßigen Wellen mit *T* 12—9 u. *A* 3 können möglicherweise auch vom Sturm herrühren.
			F	15 48 —				
50.	12. Mai	*I*	*e*	22 6 55				
			M	22 14 55	18	8	18	
			F	22 51 —				

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*MEZ*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *OW*	Bemerkungen
51.	15. Mai	*IIu*	*P*	9 42 31	< 1	< 1	< 1	Die starke Welle des zweiten *i* in *S* kann nicht gemessen werden, da sie zum größten Teil in die Stundenlücke fällt. In *Plauen* registriert. Flache Wellen.
				9 42 42	10	10		
			i	9 45 9	9	6	1,5	
			S	9 51 35	15	16		
			S	9 51 24	15		10	
			i	9 56 10	25	36		
			i	9 59 40				
			Le	10 5 5				
			M_I	10 13 22	15	13	7	
			M_{II}	10 17 2	16	46	35	
			C		15—12			
			F	11 35 —				
52.	16. Mai		*e*	9 34				Flache Wellen, bei *NS* stark durch Wind gestört.
					15		3	
			F	9 46				
53.	16. Mai		*e*	15 46 —				Wie No. 52.
					15		3	
			F	16 — —				
54.	17. Mai	*IIr*	*Pi*	13 35 2	1,2	4,5	4	In *Plauen* mit auffallend kräftigen Einsätzen, die nach ihren Zeitabständen dem Leipziger *Pi*, *Si*, i_{II} und *L* entsprechen, registriert.
					4	6,5	8	
			Si	13 38 28	9		5	
			i_I	13 38 45	5	22	13	
			i_{II}	13 39 2	4		13	

No.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (*M E Z*) h m s	Perioden sek.	Amplituden μ *NS*	Amplituden μ *O W*	Bemerkungen
	17. Mai	*II r*	*L*	13 41 50	7		11	
			M	13 42 35	9		15	
			F	14 — —				
55.	**24. Mai**	*I v*	*e*	**10 8 45**				**Schwächste Erzitterungen. In Ungarn gefühlt.**
			F	10 9 10				
56.	**28. Mai**	*I v*	*e*	**9 28 22**				**In Ungarn gefühlt.**
			e	9 29 6				
			M	9 29 46	1,5	1,5	2	
			F	9 34 30				
57.	**30. Mai**	*I*	*e*	**16 3 —**				
			M	16 3 45	9	1,5	1,5	
			F	16 12 —				
58.	**3. Juni**	*II u*	*S*	**17 11 40**	9		1,5	**Von den ersten Vorläufern ist wegen der Tagesstörungen nichts zu erkennen.**
			i	17 15 15	12	4	6	
			Le	17 20 50				
			M_I	17 26 10	18	24	30	
			M_{II}	17 30 50	12	12	20	
			F	19				
59.	**9. Juni**	*I u*	*e*	**4 41 —**				**Flache Wellen.**
			M	4 50 5	12	3	2,5	
			F	5 — —				

Tabelle II.

Die in Leipzig vom 1. Januar bis 30. Juni 1908 aufgezeichneten pulsatorischen Bewegungen.

Januar		Februar		März		April		Mai		Juni	
T sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ	*T* sek.	*A* μ
6—5	< 1	5—6	< 1	5—6	< 1	o. 6	< 1	6—8	< 1	o. 5—8	< 1
5,5—8	< 1			5—6	< 1	o. 6	< 1	6—8	< 1	5—8	< 1
5,5—8	< 1			—	—	o. 6	< 1	6—8	< 1	6—10	< 1
5—6	< 1	5—8	< 1	—	—	—	—	5—8	< 1	6—8	< 1
—	—	6	< 1—1	—	—	—	—	7—8	< 1	6—7	< 1
5—6	< 1—1	6—7	1—2,5	5—8	< 1			6—7	< 1	o. 6	o. < 1
6	< 1	6—7	< 1—1	5—6	< 1	6	< 1	5—8	< 1	—	—
5,5	< 1	6—7	1—2	5—8	< 1	—	—	6	< 1	o. 6—10	o. < 1
5—7	< 1	6	< 1	6	1—1,5	—	—	6—7	< 1	o. 6—8	o. < 1
5—6	< 1	6—8	< 1	6	< 1	—	—	6—7	< 1	o. 6	o. < 1
6	< 1—1	6—8	< 1	5—6	< 1	o. 8	o. < 1	6—7	< 1	o. 6	o. < 1
5—6	< 1	5—8	< 1	5—6	< 1	—	—	6—9	< 1	5—6	< 1
6	< 1	5—8	< 1	5—8	< 1	o. 8	o. < 1	4,5—7	< 1	o. 6—10	o. < 1
5—6	< 1	5—8	< 1	5—8	< 1	5—8	< 1	4,5—7	< 1	5—10	< 1
6—8	< 1	5—6	< 1			6—8	< 1	5—8	< 1	o—10	o. < 1
5—6	< 1	5—6	< 1	—	—	6—8	< 1	5—8	< 1	6—7	< 1
5—7	< 1	5—6	< 1	5—6	< 1	o. 6	o. < 1	5—8	< 1	6—10	< 1
5—7	< 1	5—7	< 1	5—8	< 1	—	—	8—10	< 1	6—10	< 1
5—7	< 1—1,5	5—8	< 1	6—9	< 1	—	—	5—10	< 1	7—10	< 1
5—8	< 1—1,5	5—8	< 1	6—7	< 1	—	—	6—8	< 1	6—10	< 1
6—7	< 1—1,5	8	1—2,5	5—6	< 1	—	—	6—8	< 1	5—7	< 1
6—8	< 1—1	8	2—4	8—9	1—2	—	—	5—6	< 1	5 15	< 1
6—7	< 1—1	6—8	1—2	6—7	1	—	—	5—8	< 1		
5—8	< 1	5—8	< 1	6—7	< 1—1	o. 6—8	o. < 1	5—8	< 1		
5—7	< 1	5—8	< 1	6—7	< 1	5—6	< 1	o. 6—8	o. < 1		
6—8	1—1,5	5—8	< 1	—	—	o. 6	o. < 1	o. 6—8	o. < 1	Betriebs-	Unterbrechung
7—8	1—2,5	8—9,5	1—4	6—7	< 1—1	o. 5—6	o. < 1	o. 6	o. < 1		
7—8	1—3	7—8	1—2,5	6—7	1—1,5	o. 5—6	o. < 1	o. 6—7	o. < 1		
6—7	1—2	6—8	< 1—1	7—8	1—2	o. 5—6	o. < 1	o. 6—7	o. < 1		
5—7	< 1—1			6—7	< 1—1,5	o. 5—8	o. < 1	5—8	< 1		
6—8	< 1—2			5—7	< 1—1			6—8	< 1		

Druckfertig erklärt 2. X. 1908.]

Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche.

Dritte Abhandlung.

Von

C. Neumann.

§ 1.

Allgemeine Untersuchungen.

Unter einem *Oval* werde ich, ebenso wie in meinen beiden früheren Abhandlungen über diesen Gegenstand[1]), eine Kurve verstehen, welche aus irgend einer von Hause aus gegebenen *Ellipse* entsteht durch Transformation nach der Methode der reziproken Radien. Denkt man sich das in Rede stehende Oval als die Randkurve einer *homogenen materiellen ebenen Fläche,* so handelt es sich um die Aufgabe, das logarithmische Potential dieser *Ovalfläche* auf äußere Punkte näher zu bestimmen und in möglichst einfacher Form darzustellen.

In dieser Beziehung bin ich in jenen beiden früheren Abhandlungen zu einigermaßen überraschenden Resultaten gelangt für den Fall, daß das Transformationszentrum im Mittelpunkt der Ellipse oder in einem ihrer beiden Brennpunkte liegt.

Inzwischen habe ich gefunden, daß ein sehr einfaches Resultat auch dann sich ergibt, wenn das Transformationszentrum im Innern der Ellipse eine ganz *beliebige* Lage hat. Der betreffende Satz lautet:

Wo das Transformationszentrum im Innern der Ellipse auch gedacht werden mag, stets wird das logarithmische Potential der betreffenden materiellen Ovalfläche in bezug auf äußere Punkte von genau derselben Beschaffenheit sein, als rührte es her von zwei festen innern Massenpunkten π_1 und π_2, und überdies von einer diese

---

1) Diese Berichte Juli 1907 Seite 278 und Dezember 1907 Seite 53.

Punkte mit einander verbindenden Kurve s, selbige versehen gedacht mit einer gewissen materiellen Doppelbelegung von konstantem Moment. — Da das Moment konstant ist, so übersieht man sofort, daß die Kurve s biegsam ist, daß sie einer fast ganz willkürlichen Deformation unterworfen werden kann.

Es ist nicht meine Absicht, die umfangreichen Rechnungen, welche zu diesem Satz führen, schon gegenwärtig mitzuteilen. Wohl aber möchte ich mir erlauben, den Satz selber etwas genauer und ausführlicher darzulegen.

Was die elliptischen Koordinaten anbelangt, so halte ich fest an der in meiner ersten Abhandlung[1]) eingeführten Bezeichnungsweise; so daß also zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y und den elliptischen Koordinaten λ, ϑ die Relationen stattfinden sollen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \left(\frac{k}{2}\right)(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) \cos \vartheta, \\ y &= \left(\frac{k}{2}\right)(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) \sin \vartheta, \end{aligned}$$

wo k die Hälfte der Brennlinie vorstellt. Die von Hause aus gegebene Ellipse mag den Parameter L besitzen, also dargestellt sein durch die Gleichung $\lambda = L$.

Irgendwo im Innern dieser Ellipse L befinde sich nun das gegebene Transformationszentrum p_0. Seine rechtwinkligen und elliptischen Koordinaten seien bezeichnet mit x_0, y_0 und λ_0, ϑ_0, so daß also die Relationen zu notieren sind:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{k}{2}\right)(e^{\lambda_0} + e^{-\lambda_0}) \cos \vartheta_0, \\ y_0 &= \left(\frac{k}{2}\right)(e^{\lambda_0} - e^{-\lambda_0}) \sin \vartheta_0. \end{aligned}$$

Überdies sei der Radius des um p_0 (als Mittelpunkt) beschriebenen Transformationskreises bszeichnet mit H.

Sind nun p und π irgend zwei zueinander *konjugierte* Punkte, d. i. irgend zwei Punkte, von denen, durch die Transformation nach der Methode der reziproken Radien, der eine in den andern sich verwandelt, so liegen p und π beide auf ein und demselben von p_0 ausgehenden Strahl. Auch wird alsdann $(p_0 p)\,(p_0 \pi) = H^2$ sein. — Bezeichnet man also die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte

1) A. a. O. Seite 281.

p_0, p und π mit x_0, y_0, x, y und ξ, η, und setzt man überdies $(p_0 p) = r$ und $(p_0 \pi) = \varrho$, so werden folgende Formeln gelten:

$$(3)\qquad \frac{\xi - x_0}{\varrho} = \frac{x - x_0}{r}, \qquad \frac{\eta - y_0}{\varrho} = \frac{y - y_0}{r}, \text{ und } r\varrho = H^2.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi - x_0 &= \frac{\varrho r}{r^2}(x - x_0) = \frac{H^2}{r^2}(x - x_0), \\ \eta - y_0 &= \frac{\varrho r}{r^2}(y - y_0) = \frac{H^2}{r^2}(y - y_0), \end{aligned}$$

oder weil $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ ist:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \xi - x_0 &= \frac{H^2 (x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \eta - y_0 &= \frac{H^2 (y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Substituiert man endlich hier für x_0, y_0 und x, y die Ausdrücke (1), (2), so gelangt man zu zwei Formeln von folgender Gestalt:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \xi - x_0 &= \mathfrak{F}(\lambda, \vartheta), \\ \eta - y_0 &= \mathfrak{G}(\lambda, \vartheta), \end{aligned}$$

die, außer den *Variablen* ξ, η und λ, ϑ, nur noch die *gegebenen Konstanten* x_0, y_0, λ_0, ϑ_0, k, H in sich enthalten.

Durch Angabe von λ, ϑ bestimmen sich also *zwei* Punkte, nämlich ein Punkt (x, y) mittelst der Formeln (1), und zugleich auch ein Punkt (ξ, η) mittelst der Formeln (6); und diese beiden Punkte sind zueinander *konjugiert*. Zur Unterscheidung werden wir die Argumente λ, ϑ (ebenso wie bisher) die *elliptischen* Koordinaten des Punktes (x, y), hingegen die *ovalen* Koordinaten des Punktes (ξ, η) nennen. Auch wollen wir unterscheiden zwischen den beiden Symbolen

$$(7)\qquad (\lambda, \vartheta) \quad \text{und} \quad [\lambda, \vartheta],$$

indem wir unter ersterem einen Punkt mit den *elliptischen* Koordinaten λ, ϑ, unter letzterem aber einen Punkt mit den *ovalen* Koordinaten λ, ϑ verstehen. Meistenteils werden wir übrigens zwei solche Punkte mit p und π bezeichnen, ihnen also die Symbole beilegen:

$$(8)\qquad p(\lambda, \vartheta) \quad \text{und} \quad \pi[\lambda, \vartheta].$$

Zwei solche Punkte (8) sind, wie schon bemerkt wurde, zueinander *konjugiert*. Demgemäß wird z. B. der zum Transformationszentrum $p_0(\lambda_0, \vartheta_0)$ konjugierte Punkt $\pi_0[\lambda_0, \vartheta_0]$ in unendlicher Ferne liegen.

Was hier von Punkten gesagt ist, überträgt sich unmittelbar auf Kurven. Ist z. B. irgend eine positive Konstante C gegeben, so werden durch die Formel $\lambda = C$ *zwei* Kurven bestimmt sein, nämlich eine Ellipse und das zu dieser konjugierte Oval. Und zwar wird durch jene Formel $\lambda = C$ die eine oder die andere dieser beiden Kurven bestimmt sein, je nachdem man das in der Formel enthaltene λ augenblicklich als elliptische oder als ovale Koordinate sich denkt.

Man kann, falls es beliebt, die Konstante C gleich L machen. Alsdann werden durch die Formel $\lambda = L$ *zwei* Kurven dargestellt sein, nämlich die von Hause aus gegebene Ellipse, zugleich aber auch das derselben konjugierte Oval, also dasjenige Oval, welches den Rand der von uns zu betrachtenden materiellen Fläche bildet. Die konstante Flächendichtigkeit dieser materiellen Fläche mag mit

$$\varepsilon \tag{9}$$

bezeichnet werden.

Um das von dieser materiellen Ovalfläche auf irgend einen äußeren Punkt ausgeübte logarithmische Potential näher angeben zu können, sind nun zuvörderst, auf Grund der von Hause aus gegebenen sechs Konstanten:

$$k,\ L,\ \lambda_0,\ \vartheta_0,\ H \text{ und } \varepsilon, \tag{10}$$

gewisse neue Konstanten: λ_1, λ_2, A, B, C zu bilden.

λ_1 und λ_2 sollen die Werte haben:

$$\lambda_1 = 2L + \lambda_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2L - \lambda_0; \tag{11}$$

wobei zu bemerken ist, daß alsdann folgende Relationen stattfinden:

$$0 < \lambda_0 < L < \lambda_2 < 2L < \lambda_1. \tag{12}$$

Was ferner die Werte der Konstanten A, B, C anbelangt, so bilde man, unter Hinzunahme irgend einer Variablen λ, folgende von λ abhängende Funktionen:

$$u = e^{-(\lambda+\lambda_0)} \quad \text{und} \quad v = e^{-(\lambda-\lambda_0)}, \tag{13}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}(\lambda) = u^2 - 2uv\cos 2\vartheta_0 + v^2, \\ \mathfrak{N} &= \mathfrak{N}(\lambda) = 1 - 2uv\cos 2\vartheta_0 + u^2v^2, \end{aligned} \tag{14}$$

sowie auch folgende Funktionen:

$$a = a(\lambda) = 4uv\left(\frac{u}{1-u^2}\right)\frac{u(1+v^2) - v(1+u^2)\cos 2\vartheta_0}{\mathfrak{M}\mathfrak{N}},$$

$$(15)\qquad b = b(\lambda) = 4uv\left(\frac{v}{1-v^2}\right)\frac{v(1+u^2) - u(1+v^2)\cos 2\vartheta_0}{\mathfrak{M}\mathfrak{N}},$$

$$c = c(\lambda) = 4uv\,\frac{uv\sin 2\vartheta_0}{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}.$$

Die Ableitungen dieser Funktionen (15) bezeichne man mit $a'(\lambda)$, $b'(\lambda)$, $c'(\lambda)$, und die Werte dieser Ableitungen für $\lambda = L$ mit

$$(16)\qquad a'(L), \quad b'(L), \quad c'(L).$$

Alsdann sind unter den A, B, C folgende Konstanten zu verstehen:

$$A = -\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{H^4}{k^2}\right)a'(L),$$

$$(17)\qquad B = -\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{H^4}{k^2}\right)b'(L),$$

$$C = -\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{H^4}{k^2}\right)c'(L).$$

Zugleich sei bemerkt, daß mittelst dieser Konstanten (17) die Gesamtmasse M der gegebenen materiellen Ovalfläche einfach ausdrückbar ist. Es ist nämlich:

$$(18)\qquad \mathsf{M} = A + B.$$

Dies vorausgeschickt, sind wir jetzt endlich imstande, nähere Auskunft zu geben, über den zu Anfang dieser Abhandlung ausgesprochenen Satz, namentlich über die dortigen Massenpunkte π_1, π_2 *und über die dortige Kurve s.*

Es besitzen nämlich jene Punkte π_1 *und* π_2 *folgende ovalen Koordinaten*[1]*:*

$$(19)\qquad \pi_1[\lambda_1, -\vartheta_0] \quad \textit{und} \quad \pi_2[\lambda_2, +\vartheta_0];$$

und ihre Massen sind

$$(20)\qquad = A \quad \textit{und} \quad = B.$$

Was ferner die materielle Doppelbelegung der Kurve s anbelangt, so denke man sich auf dieser von π_1 *nach* π_2 *laufenden Kurve s diejenige Normale n errichtet, deren Richtung zur Kurvenrichtung*

---

1) Aus den in (19) über die Lagen der Punkte π_1, π_2 gemachten Angaben und mit Rücksicht auf (12), erkennt man leicht, daß diese festen Punkte π_1, π_2 stets *innerhalb* der gegebenen materiellen Ovalfläche L gelegen sind.

ebenso liegt, wie die x-Achse zur y-Achse; was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$(21)\qquad n : s = x : y.$$

Alsdann wird das Moment jener Doppelbelegung, in der Richtung n gerechnet,

$$(22)\qquad = C$$

sein.

Entsprechend den Angaben (20), (22), wird man das logarithmische Potential V der gegebenen materiellen Ovalfläche in bezug auf irgend einen äußeren *Punkt π folgendermaßen auszudrücken imstande sein:*

$$(23)\qquad V = A \log\left(\frac{1}{\Delta_1}\right) + B \log\left(\frac{1}{\Delta_2}\right) + C \int_{\pi_1}^{\pi_2} \frac{d}{dn} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \cdot ds,$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente ds der von π_1 nach π_2 laufenden Kurve s. Dabei bezeichnet n die auf ds errichtete Normale, und zwar diejenige Richtung dieser Normale, von welcher bereits in (21) die Rede war. Ferner bezeichnen Δ_1, Δ_2 und Δ die Abstände des sollizitierten äußeren Punktes π von den beiden festen Punkten π_1, π_2 und von dem Kurvenelement ds.

Dabei ist noch Folgendes hinzuzufügen: Die Kurve s kann zuvörderst im *Innern* der gegebenen materiellen Ovalfläche auf ganz *beliebigem* Wege von π_1 nach π_2 gehen.

Sodann aber werden wir diese Kurve nachträglich noch einer *fast willkürlichen* Deformation unterwerfen dürfen, und in solcher Weise z. B. bewirken können, daß einzelne Teile der Kurve in den *Außenraum* der materiellen Ovalfläche zu liegen kommen. Die einzige Beschränkung jener Willkür besteht darin, daß die Kurve bei der in Rede stehenden Deformation, niemals den sollizitierten äußeren Punkt π berühren, oder gar über ihn hinweggleiten darf.[1])

§ 2.

Anwendung auf besonders einfache Fälle.

Der Anfangspunkt des Koordinatensystems x, y liegt, wie aus (1) ersichtlich ist, im *Mittelpunkt M* der von Hause aus gegebenen Ellipse $\lambda = L$. Und die x-Achse ist, wie ebenfalls aus den Formeln

1) Selbstverständlich müssen ihr Anfangspunkt und ihr Endpunkt stets in den beiden Punkten π_1 und π_2 bleiben.

(1) hervorgeht, diejenige, auf welcher die beiden Brennpunkte dieser Ellipse gelegen sind. Die *große* Achse der Ellipse fällt also in die x-Achse, und die *kleine* Achse derselben in die y-Achse. Um uns bequemer ausdrücken zu können, wollen wir noch die Buchstaben X und Y einführen. Und zwar seien X und Y diejenigen beiden Punkte, in denen die Randkurve der zu betrachtenden materiellen Ovalfläche geschnitten wird von der positiven x-Achse und von der positiven y-Achse. Von diesen Punkten:

(24) $$M \text{ und } X,\ Y$$

wird im folgenden die Rede sein.

Wir wollen nun annehmen, das Transformationszentrum p_0 sei gelegen auf der positiven x-Achse oder auf der positiven y-Achse. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: *Das Transformationszentrum p_0 liegt auf der positiven x-Achse, und zwar zwischen den beiden Brennpunkten der von Hause aus gegebenen Ellipse.* — Alsdann liegen π_1 und π_2 zu beiden Seiten der x-Achse, und zwar symmetrisch zu dieser Achse. Auch wird alsdann die Masse A des Punktes π_1 genau ebensogroß sein, wie die Masse B des Punktes π_2.

Liegt insbesondere p_0 im *Mittelpunkt* M der von Hause aus gegebenen Ellipse (wie solches in meiner ersten Abhandlung vorausgesetzt wurde) so verschwindet die Konstante C; sodaß also jene von π_1 nach π_2 gehende materielle Doppellinie alsdann ebenfalls verschwindet.

Liegt, um zu einem anderen Spezialfall überzugehen, das Transformationszentrum p_0 im einen *Brennpunkt* der von Hause aus gegebenen Ellipse (wie solches in meiner zweiten Abhandlung vorausgesetzt wurde), so fallen die beiden Massenpunkte $\pi_1(A)$ und $\pi_2(B)$ miteinander zusammen. Und gleichzeitig verwandelt sich alsdann die von π_1 nach π_2 gehende materielle Doppellinie in einen materiellen Doppelpunkt.

Zweiter Fall: *Das Transformationszentrum p_0 liegt auf der positiven x-Achse, aber außerhalb der beiden Brennpunkte der von Hause aus gegebenen Ellipse.*[1]) — Alsdann verschwindet die Konstante C; und es verschwindet also auch die von π_1 nach π_2 gehende materielle Doppellinie.

Es bleiben also nur noch übrig die beiden Massenpunkte $\pi_1(A)$

---

1) Selbstverständlich soll dabei p_0 *im Innern* der von Hause aus gegebenen Ellipse gedacht werden.

und $\pi_2(B)$. Diese liegen beide auf der positiven x-Achse, und zwar zwischen p_0 und X, in folgender Reihenfolge [vgl. (24)]:

$$M \cdots\cdot p_0 \cdots\cdot \pi_1(A) \cdots\cdot \pi_2(B) \cdots\cdot X.$$

Dabei ist, was die Massen der beiden Punkte anbelangt, A *negativ* und B *positiv*. Auch ist B größer als der absolute Betrag von A, mithin $(B + A)$ *positiv*.

Dritter Fall: *Das Transformationszentrum* p_0 *liegt auf der positiven* y*-Achse.*[1]) — Alsdann verschwindet die Konstante C; und es verschwindet also auch die von π_1 nach π_2 gehende materielle Doppellinie.

Es bleiben also nur noch übrig die beiden Massenpunkte $\pi_1(A)$ und $\pi_2(B)$. Diese liegen auf der y-Achse. Ihre relative Lage in bezug auf die dieser Achse angehörigen Punkte p_0 und Y ist folgende [vgl. (24)]:

$$\pi_1(A) \ldots . p_0 \ldots\ldots\ldots \pi_2(B) \ldots . Y.$$

Dabei liegt $\pi_1(A)$ *näher* an p_0 als $\pi_2(B)$. Auch sind im hier betrachteten Fall die Massen A und B beide positiv, und $A < B$.

Bemerkung. — In allen drei Fällen ist $A + B = \mathsf{M}$, wo M die Gesamtmasse der materiellen Ovalfläche vorstellt. Solches ergibt sich unmittelbar aus (18).

---

1) Hier ist gleiches zu bemerken wie in der vorigen Note.

Druckfertig erklärt am 1. X. 1908.]

Über den Einfluß der Röntgenstrahlen auf das Einsetzen der Glimmentladung.

Von

Erich Marx.

I.

Einleitung.

In meiner Abhandlung über die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen zeigte ich, daß der dort beschriebene Nullapparat im wesentlichen dadurch charakterisiert ist, daß im Falle eines von den Röntgenstrahlen negativ angetroffenen Potentials der schwingenden Elektrode, von dem der Elektrode gegenüber befindlichen Elektrometer starke negative Ladungen angezeigt werden, während im Falle des Antreffens eines positiven Potentials, die Elektrometer-Ausschläge eine schwache positive Ladung anzeigten. Während diese schwachen Ausschläge aus der durch die Röntgenstrahlen hervorgerufenen Ionisation verständlich waren, reichte diese Erklärung für das Auftreten der starken negativen Ausschläge nicht aus. Die Größenordnung dieser Ausschläge war nur verständlich [1]), wenn man annahm, daß sie durch die Feldenergie der bestrahlten Elektrode bedingt sei, was sich auch dadurch offenbarte, daß die stärksten Ausschläge von einem, im Dunkeln wahrnehmbaren Leuchten des Gases begleitet waren. Das Charakteristikum der Versuchsanordnung bestand also darin, daß nur bei negativ angetroffener Elektrode eine wirkliche Feld-Entladung der Elektrode eintrat, bei positiver nicht. Das polare Einsetzen der leuchtenden Entladung wurde von mir dadurch zu erklären versucht, daß die am *Pt* freiwerdenden, langsamen Elektronen den Potentialfall in bekannter Weise (vgl. nächstes Kap.) derart beeinflussen, daß die Bedingungen für das

1) E. Marx, Phys. Z. S. 6. 772. 1905. Verh. d. D. Phys. Ges. X. p. 157. 1908.

Einsetzen der Glimmentladung eintreten mußten. Dieses Einsetzen mußte hiernach ausbleiben, wenn die Kathode keine hinreichend langsame Kathodenstrahlung in genügender Menge abgab. Dies ist bei *Al* der Fall; am *Al*-Fenster entstehen, auch wenn es Kathode ist, langsame Kathodenstrahlen höchstens in ganz verschwindender Anzahl[1]); es werden dort im wesentlichen nur Strahlen von großer Geschwindigkeit [Bragg's Emergen-Radiation] frei, und zwar, von dieser beträchtlich mehr an der Austrittsseite der Röntgenstrahlen, also am *Al*-Fenster, als beim Auftreffen auf die Elektrode.[2])

In vorliegender Arbeit sollen die Verhältnisse, welche im Nullapparat der Geschwindigkeitsmessung dieses polare Einsetzen der Glimmentladung bedingen, gesondert untersucht werden. Dies erschien um so wünschenswerter, als in den bisherigen Versuchen, wie Herr W. Wien so freundlich war mir brieflich mitzuteilen, ein experimenteller Nachweis für ein derartiges Verhalten der Glimmentladung nicht enthalten ist. Es existiert nämlich in der Tat von quantitativen Untersuchungen über den Einfluß der Röntgenstrahlen auf die Glimmentladung, soweit ich feststellen konnte, nur eine Würzburger Dissertation von Herweg[3]). In dieser ist aber der Einfluß der Röntgenstrahlen nur für den Fall untersucht, daß weder die Elektroden noch die Glaswand des Entladungsgefäßes, soweit sie von Einfluß sein kann, von den Strahlen getroffen werden.

II.

Die Ausbildung der Glimmentladung.

Bevor auf die eigenen Versuche und ihre Diskussion eingegangen wird, erscheint es zur Vereinfachung der Darstellung zweckmäßig, kurz an folgende Vorstellungen zu erinnern[4]), die sich auf Grund der Ionenhypothesen, über das Zustandekommen der Glimmentladung herausgebildet haben: Durch das Anlegen einer höheren Spannung an die Elektroden werden an der Kathode Elektronen frei. Ist das Gefälle von hinreichender Größe, so entsteht in einiger Entfernung von der Kathode infolge von Ionisation durch Stoß ein Gebiet größerer Leitfähigkeit. Die in diesem Bereich freiwerdenden

1) W. Wien. Gött. Nachr. 1908.

2) W. H. Bragg. Trans. of the Royal. Soc. of South Australia. 32. 1908.

3) J. Herweg. Ann. d. Phys. IV. 19. 333. 1906.

4) Vgl. J. J. Thomson: El. Durchg. in Gasen. 1906. p. 506.

positiven Ionen werden von der Kathode angezogen und erzeugen dort beim Auftreffen neue Elektronen, die ihrerseits wieder in einiger Entfernung von der Kathode die Leitfähigkeit erhöhen. Auf diese Weise nimmt der Potentialfall in einiger Entfernung von der Elektrode stark ab, und infolge dessen, da die Spannung an den Elektroden konstant ist, an den Elektroden selbst zu. In dem sich einstellenden stationären Zustand ist der Potentialfall im wesentlichen auf die Elektroden beschränkt; die Stellen maximaler Ionen-Produktion zeigen die bekannten Leuchterscheinungen. An der Anode ist alsdann freie negative Elektrizität, an der Kathode freie positive Elektrizität im Gasraum vorhanden.

III.
Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Eine Hochspannungsbatterie von der bekannten Feussner-Bornhäuser Type von 500 Akkumulatoren führt über einen Amylalkoholwiderstand von etwa 40000 Ohm zur Elektrode des Entladungsgefäßes. Der zweite Batteriepol wird geerdet. Ein Braunsches Elektrometer liegt direkt an der Elektrode. Die Variierung des anzulegenden Potentials erfolgt von der Batterie aus zunächst durch Kurbelschaltung. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Aufladung der Elektrode und des elektrostatischen Voltmeters kontinuierlich und nicht stoßweise erfolgt, weil es sonst nicht gelingt, größere Spannungen an die Elektrode anzulegen. Bei plötzlichem Einschalten lädt sich bekanntlich die Elektrode oszillatorisch auf, so daß die Momentanwerte der Spannung bis zu dem doppelten Wert des Batteriepotentials steigen können[1]). Um ein langsames Aufladen zu ermöglichen, leistete mir ein alter Stromschlüssel *A*, dessen Ebonit etwas leitend geworden war, gute Dienste. Diese Leitfähigkeit ist durch Parallelzeichnen eines Widerstandes, in der Fig. 1, angedeutet. Einige Sekunden nach Einstellungen der Batteriekurbel zeigt das Elektrometer bei offenem Schlüssel annähernd das gleiche Potential wie bei Einschaltung. Um aber jede Überspannung beim Einschalten ganz sicher zu vermeiden, dazu diente der zweite

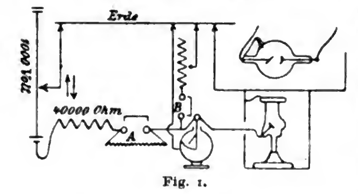


Fig. 1.

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 5. 818. 1901.

Schlüssel *B*. Dieser wird kurz vor Einschaltung von *A* geschlossen. Hierdurch legt man den Batteriepol über einen sehr großen variablen Widerstand zur Erde, so daß ein Abfluß erfolgt, der das Potential an der Stelle der Verzweigung etwas heruntersetzt, ohne daß die Spannung des Elektrometers wegen der Größe des Widerstandes *A* so schnell sinkt. Ist *A* dann geschlossen, so kann der Widerstand *B* durch eine Schraube bis zur Ausschaltung kontinuierlich gesteigert werden. (Ich benutzte einen Gummischlauch, der Amylalkohol enthielt, und dessen Querschnitt durch eine Klemme verringert wurde). Ist dann dieser Widerstand bis zur Ausschaltung vergrößert, so wird *B* geöffnet, und falls keine Entladung erfolgt ist, wird bei offenem *B* erst der Widerstand hinter *B* wieder eingeschaltet, alsdann *A* geöffnet, 100 Volt durch die Kurbel zugeschaltet, dann erst *B* und nachher *A* geschlossen. Auf diese Weise läßt sich sehr einfach das zunächst angelegte Potential kontinuierlich steigern und so das maximale Potential finden, das die Elektrode noch gerade aushält.

Bei dieser Untersuchung handelt es sich im übrigen nicht um die Auffindung von Erscheinungen, die eine feinere Messung nötig machen, vielmehr lag mir nur daran, größere Effekte festzustellen. Die Ablesegenauigkeit am Voltmeter beträgt etwa 10 Volt. Ist die Entladung aus irgend einem Grunde übergegangen, so muß man einige Zeit warten, bevor man wieder Spannung anlegt, weil die Leitfähigkeit des Gases nicht gleich verschwindet.

Ganz wesentlich ist peinlichste Isolation aller zuführenden Teile (Bernstein), weil ein Abfließen hoher Spannungen über schlechte Leiter leicht zu Gleit-Fünkchen Anlaß gibt, und aus obigem Grunde ein hohes Potential nicht anlegbar ist. Im allgemeinen kann man als Kriterium dafür, daß man das maximal mögliche Potential angelegt hat, daß also Isolation etc. in Ordnung ist, die Regel nehmen, daß sich alsdann der Elektrode, durch vorsichtiges Anlegen, ein Potential erteilen läßt, das etwa 40% größer ist als dasjenige, das bei plötzlichem Einschalten der Batterie das Entstehen der Glimmentladung verursacht. DerKasten, der das Entladegefäß enthält, ist völlig geschlossen, und hat ein Aluminiumfenster, durch das die Röntgenstrahlen einer Röntgenröhre von 5 cm Schlagweite fallen. An der Vorderfläche des Kastens ist ein Drahtnetz in die Metallwand eingelötet, um beobachten zu können. Die ganze Schaltung ist von einem großen Zinkblech weit überragend überdacht. Der Einfluß der Röntgenstrahlen wird natürlich nur so

untersucht, daß erst dann die Zulassung der Röntgenstrahlen vorgenommen wird, wenn es sich zeigt, daß die Einschaltung der Röhre ohne Einfluß ist, so lange das *Al*-Fenster des Kastens mit Blei bedeckt ist.

Evakuiert wurde mit einer *Hg.*-Pumpe, bis zu solchem Druck, daß bei den angegebenen Röhrendimensionen und der verwendeten Spannung die Anode noch positives Licht zeigte und der erste dunkle Kathodenraum etwa 1 bis 2 cm betrug. Das Gas selbst muß natürlich trocken sein. Wenn die Röhren längere Zeit stehen oder abgeschmolzen sind, wird das Glimmlicht immer weißlicher und ist nach etwa acht Tagen völlig weiß. Das Vakuum verändert sich nicht merklich während Wochen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß der als Kitt für die Fenster verwendete Marineleim den Gasinhalt verändert. Ist das Glimmlicht in dieser Weise verändert, so konnte ich die im folgenden beschriebenen Erscheinungen nicht erhalten. Die Intermittenz der Entladung, die nach Capstick[1]) in komplizierten Gasen eintritt, dürfte hiermit in Zusammenhang stehen, indem sie schon im Vorbereitungsstadium des Gases vor dem Eintritt der leuchtenden Entladung in Erscheinung tritt.

Die *Al*-Fenster bestanden aus *Al*-Folie von 4/100 mm Dicke und waren derartig zwischen zwei Glasringe mit Marineleim gekittet, daß die *Al*-Folie über den Rand des oberen Ringes herübergebörtelt war und durch eine Klemme Kontakt angebracht werden konnte. Die Fenster hatten ein Lumen von 3.7 cm und waren auf abgeschliffene Flansche, unter Zwischenkittung eines weiteren Glasringes, mit Marineleim so aufgekittet, daß sie gegen *das Glas, elektroskopisch geprüft, isolierten.* Die Versuche gelingen nur bei völliger Trockenheit des Glases. Es erweist sich vorteilhaft, die Röhren unter Anlegung eines höheren Potentials, das keinen Glimmstrom verursacht, einige Stunden an der Pumpe zu belassen, bevor man die Messungen beginnt.

IV.

Experimente bei nicht bestrahlten Elektroden.

Es kamen zwei Entladungs-Röhren, die in Fig. 2 und 3 dargestellt sind, zur Verwendung. Als Elektroden dienen die *Al*-Folien, die in späteren Versuchen als Fenster benutzt werden.

---

1) Capstick. Proc. Royal. Soc. 63. p. 356. 1898.

Für die Röhre Fig. 2, bei der weder die Elektroden noch die in Betracht kommende Glaswand von Röntgenstrahlen getroffen wurde, ergab sich folgendes Resultat:

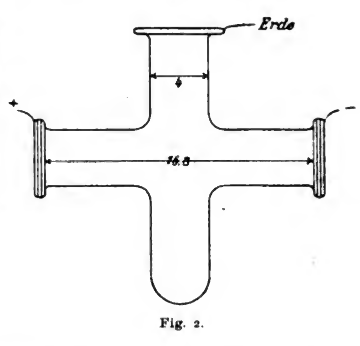


Fig. 2.

Tabelle I.

ohne Röntgen-Strahlen	mit Röntgen-Strahlen
740	720
730	710
740	710

Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den Angaben von Herweg. Herr Herweg fand in einem Gefäß, in welchem die Glaswände nicht getroffen wurden, eine Erniedrigung der Entladespannung von 12—14 Volt bei 2 mm Druck und einer Entladespannung, die ohne Bestrahlung 620 Volt betrug.

Wurde die Röhre Fig. 3 benutzt, so daß die Röntgenstrahlen zwar nicht die Elektroden, wohl aber die Glaswand trafen, so nahm die Erniedrigung der Entladespannung beträchtlich zu. Es wurde beobachtet:

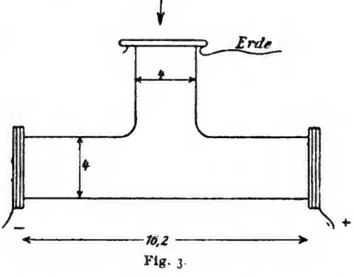


Fig. 3.

Tabelle II.

ohne Röntgen-Strahlen	mit Röntgen-Strahlen
770	700
760	710
780	710
760	690

Die Erklärung für die Erniedrigung des Entladungspotentials in diesen beiden Versuchen ist nach den oben skizzierten Vorstellungen über das Zustandekommen der Glimmentladung darin zu finden, daß durch die Röntgen-Bestrahlung die Leitfähigkeit des Gases in einiger Entfernung von den Elektroden so stark erhöht wird, daß an diesen Stellen der Potentialfall beträchtlich abnimmt. Da konstantes Potential an den Elektroden liegt, so muß an diesen, u. zw. speziell an der Kathode, auf die es in erster Linie ankommt,

das Gefälle steigen. Es wird also durch künstliche, lokale Steigerung der Leitfähigkeit zwischen den Elektroden, die Ausbildung derjenigen Feldverteilung, die für das Einsetzen der Glimmentladung wesentlich ist, erleichtert. Da im Falle der Röhre Fig. 3, die Sekundärstrahlung des getroffenen Glases in gleicher Richtung wirkt, so wird der von HERWEG beobachtete Effekt in der Fig. 3 noch verstärkt. Wurde die Leitfähigkeit nicht wesentlich zwischen den Elektroden gesteigert, indem die in Fig. 3 abgebildete Röhre so bestrahlt wurde, daß beide Elektroden von Röntgenstrahlen getroffen wurden, so treten ganz andere Verhältnisse auf.

Es sollen diese hier bei diesem Rohr nicht näher erörtert werden, weil hier eine Strömung zwischen Kasten und Fenster und die veränderte Verteilung der elektrischen Kraftlinien Komplikationen bedingt. Es sei nur soviel bemerkt, daß, wenn die Leitfähigkeit eine relativ gleichmäßige Verstärkung im ganzen Entladungsraum infolge der Bestrahlung erleiden würde, so wäre keine Erniedrigung des Entladungspotentials, sondern das Gegenteil zu erwarten, da alsdann die Ausbildung des charakteristischen Potentialgefälles erschwert würde.

V.

Experimente bei bestrahlten Elektroden.

Bei den nun folgenden Experimenten wurde stets so verfahren, daß das Fenster, durch das die Röntgenstrahlen auf die bestrahlte Elektrode fielen, auf dem gleichen Potential, wie der Schutzkasten sich befand. Es waren stets entweder beide geerdet oder beide auf dem gleichen Potential und die Elektrode geerdet, wodurch bei gleicher Richtung des Gefälles kein Unterschied der Resultate eintrat. In letzterem Falle wurde der Kasten natürlich isoliert aufgestellt. Es sei aber erwähnt, daß außer den in Folgendem beschriebenen Versuchen eine große Zahl anderer angestellt wurde, bei denen die Verteilung der elektrischen Kraftlinien bei Vorzeichenwechsel der Elektroden in Hinsicht auf die Umgebung, speziell auf den elektrostatischen Schutzkasten geändert wurde. Dann treten merkwürdige, mir z. T. bisher unerklärbare Verhältnisse auf, auf die ich an dieser Stelle nicht eingehe, um die bereits hier nicht ganz einfach liegenden Verhältnisse nicht noch zu komplizieren.

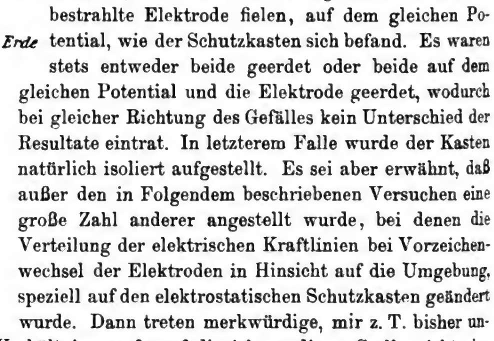


Fig. 4.

Es wurden zwei völlig gleiche Entladungsröhren hergestellt, von der Form der Fig. 4. Bei der einen bestand die untere Elektrode aus *Al*, bei der anderen aus *Pt*.

Wurde an die *Al*-Elektrode einmal positives, das zweite Mal negatives Potential gelegt, so erhielt ich folgendes Resultat:

Tabelle III.

$Al_{(+)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$		$Al_{(-)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$	
mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen	mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
610	600	760	790
600	600	760	780
610	610	750	800

Es war also trotz der Symmetrie der Elektroden in Hinsicht des Materials ein schwacher aber sehr deutlicher Einfluß der Röntgenstrahlen zu beobachten, falls die untere Elektrode negativ getroffen wurde. Die Erklärung liegt, wie ich denke, z. T. in den oben erwähnten Versuchen von Bragg und noch mehr in der durch die Konfiguration der Röhre zu den Elektroden bedingten Unsymmetrie der Bestrahlung; wir kommen später darauf zurück. Wurde in gleicher Weise die Röhre mit der *Pt*-Elektrode bestrahlt, so ergab sich folgendes Resultat:

Tabelle IV.

$Pt_{(+)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$		$Pt_{(-)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$	
mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen	mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
600	605	600	850
605	600	610	880
600	605	600	850

Hier also zeigte sich ein mächtiger Einfluß in dem Falle, daß die *Pt*-Elektrode negativ angetroffen wurde. Die Erklärung für die in diesen Tabellen wiedergegebenen Experimente ist offenbar die schon bei früheren Beobachtungen unter ähnlichen Umständen von mir herangezogene[1]). Betrachten wir zunächst den Fall, der in der vierten Tabelle vorliegt. Die vom *Pt* ausgehenden langsamen Kathodenstrahlen setzen in einiger Entfernung von der Elektrode durch die Erzeugung einer beträchtlichen Leitfähigkeit das Gefälle

1) E. Marx. Verh. d. D. Phys. Ges. X. p. 148. 1908.

herunter, dieses steigt an der Kathode und leitet so die Glimmentladung eher ein, als dies ohne Bestrahlung geschieht. Ist aber das bestrahlte *Pt* Anode, so werden die langsamen Kathodenstrahlen zurückgehalten und können infolgedessen die Leitfähigkeit zwischen den Elektroden nicht erhöhen. In diesem Falle müßte aber trotzdem das gleiche Resultat der Röntgenstrahlen zu erwarten sein, wenn eine merklich langsame Kathodenstrahlung von dem durchstrahlten *Al*-Fenster, das ja bei positiver Ladung der *Pt*-Elektrode Kathode ist, ausginge. Dies ist aber nicht der Fall. Denn der Integraleffekt der Sekundärstrahlung ist bei auffallender Strahlung (BRAGGS Incidance Radiation) an sich sehr gering und der prozentische Anteil dieser geringen Strahlung an langsamen Strahlen wiederum, wie Herr W. WIEN[1]) zeigte, außerordentlich geringer als bei *Pt*. Die geringe Menge δ-Strahlen, die am *Al* durch die Röntgenstrahlen frei wird, ist deshalb viel zu gering, um die Entladung vom Fenster aus zu erwirken. Das Verhalten der Entladung bei einer durch ein *Al*-Fenster bestrahlten *Pt*-Elektrode ist hiernach völlig verständlich. Nicht aber das Verhalten der nach Durchtritt durch das *Al*-Fenster getroffenen *Al*-Elektrode. Hier erscheint ein Einfluß des Potentials der *Al*-Elektrode zunächst aus Symmetriegründen unmöglich. Der Grund für das tatsächlich unsymmetrische Verhalten scheint mir nun hier in Folgendem zu liegen: Die oben bereits erwähnten BRAGGschen Experimente erweisen für weiche γ-Strahlen einen Unterschied derjenigen Sekundärstrahlen, die beim Auftreffen der Röntgenstrahlen frei werden, gegenüber denen, die beim Durchtritt an der Kehrseite des bestrahlten *Al* entstehen. BRAGG zeigte (für Röntgenstrahlen qualitativ COOKSEY), daß an der Kehrseite des bestrahlten *Al* achtmal so viel β-Strahlen frei werden, als an der Auftreffseite[2]). Es werden also am *Al*-Fenster sehr viel mehr schnelle Strahlen frei, als an der *Al*-Elektrode. Dies gilt ceter. par.; hier, wo das Strahlenbündel nicht ausgeblendet ist, kommt hinzu, daß aus geometrischen Gründen die frei werdende Menge natürlich noch viel größer ist. Diese schnellen Strahlen treffen z. T. die gegenüberbefindliche Elektrode, z. T. die Glaswand, und erzeugen überall, wo sie negative Ladung antreffen, δ-Strahlen. Es erscheint demnach durchaus möglich, daß bei völliger Symmetrie der bestrahlten Elektroden in Hinsicht des Materials, allein durch die Bestrahlungsrichtung

1) W. WIEN. Nachr. d. Gött. Ges. d. Wissensch. 1908.
2) W. H. BRAGG. l. c.

polare Unterschiede auftreten: In der Tat lassen sich die Versuche der Tabelle III für das bestrahlte *Al* so deuten, daß sich das bestrahlte *Al* so verhält, als wenn es langsame Kathodenstrahlen abgibt, während die durchstrahlle *Al*-Folie keine langsamen Strahlen, sondern nur solche von so großer Geschwindigkeit aussendet, daß keine partielle Beeinflussung des Gradienten zwischen den Elektroden eintritt. Das Fehlen einer merklichen δ-Strahlung an der durchstrahlten *Al*-Folie ist also völlig hinreichend, um zu erklären, warum eine beträchtliche Herabsetzung des Entladepotentials nur eintritt, wenn die untere, bestrahlte Elektrode Kathode ist, nicht eintritt, wenn das *Al*-Fenster Kathode ist. — Daß dieser bei der bestrahlten *Al*-Elektrode diskutierte δ-Strahleneffekt, der also nur indirekt den Röntgenstrahlen, direkt den durch letztere am *Al*-Fenster in großer Menge erzeugten β-Strahlen zu verdanken ist, auch beim *Pt* mitwirkt, versteht sich natürlich von selbst. Bei den im folgenden untersuchten Röhren zeigte sich eine Beeinflussung des Entladungspotentials bei positiver Elektrode in umgekehrter Richtung wie die hier bei Bestrahlung der Kathode festgestellte. Hierauf, und warum dieser Effekt sich hier nicht zeigte, darauf kommen wir später zurück.

Wir haben uns mit diesem Experiment schon weitgehend dem Falle genähert, der in dem Nullapparat der Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen vorliegt und der, wie in der Einleitung hervorgehoben, hier gesondert untersucht werden sollte. Wird die *Pt*-Elektrode positiv angetroffen, so wird die Entladung nicht erleichtert, wird sie negativ angetroffen, so wird sie sehr bedeutend erleichtert, dann tritt die auslösende Wirkung der Röntgenstrahlung in Erscheinung. Dieses letzte Experiment zeigt, wie ich denke, daß meine Ausführungen[1]) über die Theorie des Nullapparates sich hier getrennt haben bestätigen lassen. Daß aber die Verhältnisse noch viel günstiger in polarer Hinsicht liegen, und der Erfolg meiner Messung noch einem weiteren, in gleicher Richtung wirkenden Effekte zuzuschreiben ist, das wird durch die folgenden Versuche klar, die sich noch weit mehr als der letzte Versuch, den Bedingungen im Nullapparat nähern.

Es ist nämlich im Falle des Nullapparates der Geschwindigkeitsmessung, der bestrahlten Elektrode parallel, und in etwa 3 cm Entfernung ein Faraday-Zylinder angebracht, der von den Röntgenstrahlen nicht getroffen wird. Die Hülle dieses Faraday-Zylinders

1) l. c. Verh. d. D. Phys. Ges. p. 138 ff.

ist geerdet. Die elektrischen Schwingungen, die von der bestrahlten Elektrode ausgehen, fließen über die Erdhülle des Zylinders zur Erde. Da die Frequenz der Schwingungen eine sehr große, der Abstand sehr gering ist, so stellt die Elektrode, zusammen mit dem Faraday-Zylinder, einen Kondensator dar, welcher der abfließenden Hertzschen Welle einen sehr geringen Widerstand bietet. Die Phasenverschiebung dieser Welle beim Durchtritt durch diesen Kondensator wird deshalb ebenfalls sehr gering sein, so daß sich die Welle nicht wesentlich anders beim Übertritt auf die geerdete Hülle verhalten wird, als wenn die Luftstrecke überbrückt wäre. Diese einfache Überlegung ergibt, daß das momentane Potential der geerdeten Hülle, das von der Hertzschen Welle herrührt, nur geringe Phasenverschiebung gegen das Potential der schwingenden Elektrode zeigen wird. Nur wird es infolge der Dämpfung und der Größe der metallischen Oberfläche des Faraday-Zylinders an diesem eine geringere Amplitude aufweisen, als die an der schwingenden Elektrode.

Will man demnach den Verhältnissen, die in diesem Apparate herrschen, gerecht werden, indem man Gleichstrom an Stelle des dort verwendeten Hochfrequenzstromes verwendet, so muß gegenüber der von den Röntgenstrahlen getroffenen schiefgestellten Elektrode eine zweite Fläche angebracht werden, die selbst nicht von den Strahlen getroffen wird, und die ein, dem Vorzeichen nach gleiches aber wesentlich schwächeres Potential hat, als die bestrahlte Elektrode. Ich verwendete zunächst ein Entladungsgefäß folgender Form, das gleichzeitig gestattet, auch unter diesen veränderten Bedingungen den Einfluß des Elektrodenmaterials zu untersuchen. Fensteröffnung und Röhrenlumen sind die gleichen, wie früher. Als Elektroden wurden zunächst schwach kalottenförmig gekrümmte verwendet deren eine, die Pt-Elektrode, dieselbe war, die in meinem Apparat zur Geschwindigkeitsmessung verwendet wurde. Die andere war eine Al-Elektrode von gleichen Dimensionen. Der Abstand der Elektroden etc. ist der Fig. 5 zu entnehmen. Legt man die eine

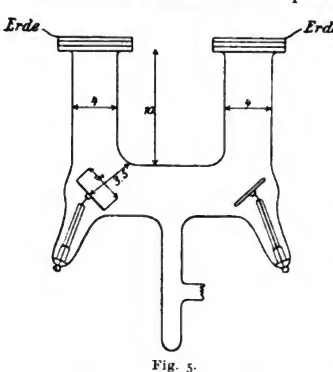


Fig. 5.

dieser beiden Elektroden an die Hochspannung, so nimmt infolge der mangelnden Isolationsfähigkeit des Glases die andere sehr bald ein Potential von gleichem Vorzeichen an, das aber aus naheliegendem Grunde etwas schwächer als das der direkt metallisch anliegenden Elektrode ist. Dort wo in den folgenden Tabellen der Index 0 an dem die Elektrode charakterisierenden Material angebracht ist, bedeutet dies, daß die betreffende Elektrode weder besonders geerdet, noch metallisch an eine Potentialquelle angelegt ist. Sie hat alsdann die durch die Leitung der Glases sich einstellende schwache Ladung der anderen Elektrode. (Tabelle V und VII.) In VI und VIII sind die nicht bestrahlten Elektroden geerdet. Die beiden Fenster sind wiederum so durch die Marineleimkittung isoliert, daß sie gegen das Glas elektroskopisch geprüft isolieren.

Tabelle V.

Pt bestrahlt

Pt_{-} $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$ $(Al)_0$

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
630	820
625	800
590	810
590	800
570	840
590	820
der Druck erhöht	
700	1080 (ev. höher,
710	1000 Ende der
730	1050 Batterie)

$Pt_{(+)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$ $(Al)_0$

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
780	640
770	650
780	620
760	630
790	630
780	680
890	810
880	790

Tabelle VI.

Pt_{-} Al und Fenster } Erde

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
510	680
500	680
520	690
530	700

Pt_{+} Al und Fenster } Erde

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
720	560
720	570
680	580
650	570

Die Tabellen ergeben, daß bei negativ angetroffener Elektrode eine Potentialerniedrigung von etwa 30% stattfindet. Die Potentialerniedrigung ist nicht sehr weitgehend konstant; es zeigt sich, daß eine Elektrode bei der ersten Bestrahlung schwerer anspricht, als wenn einmal eine Auslösung erfolgt ist. Oberflächenbeschaffenheit und Gasinhalt beeinflussen ihn. Der Effekt ist etwa von der gleichen Größe wie er vorhin bei *Pt* gefunden wurde. *Ganz überraschend aber ist der Einfluß, der sich hier bei positiver Ladung der Pt-Elektrode zeigt.* Das Experiment ist leicht zu demonstrieren, wenn allenthalben die oben angegebenen Vorsichtsmaßregeln innegehalten werden; es wirkt zunächst erstaunlich, daß man während der Bestrahlung ein höheres Potential an die Elektrode legen kann, als ohne Bestrahlung, daß also ein Abblenden der Röntgenstrahlen mit einem Bleiblech bei positiv angetroffener Elektrode gerade den umgekehrten Effekt ausübt, als im Falle der gewohnten negativen Auslösung. Bevor auf die Diskussion eingegangen wird, mögen die entsprechenden Resultate für *Al* mitgeteilt werden.

Tabelle VII.

Al bestrahlt.

$Al_{(-)}$ Fenster$_{\text{Erde}}$ $Pt_{(0)}$

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
575	725
605	800
620	810

$Al_{(+)}$ Fenster$_{\text{Erde}}$ $Pt_{(0)}$

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
740	720
720	675
760	720
750	690
740	680

Tabelle VIII.

Al_- Fenster, *Pt* } Erde

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
485	505
500	520

Al_+ Fenster, *Pt* } Erde

mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
715	670
710	650
680	650

Die hier angegebenen Zahlen ändern sich nicht, wenn anstatt der kalottenförmigen Elektroden, wie weiter unten angegeben, ebene genommen werden; es erscheint deshalb unnötig besondere Ta-

bellen hier anzugeben. Auch änderten sie sich nicht, wenn anstatt $Al_{-} - \left.\begin{matrix}\text{Fenster}\\ Pt\end{matrix}\right\}$ Erde, $Al_{\text{Erde}} - \left.\begin{matrix}\text{Fenster}\\ Pt\end{matrix}\right\} +$, genommen wurde.

Rein äußerlich möge bemerkt werden, daß ich bei ganz frischen *Al*-Elektroden die angegebenen Effekte, namentlich die bei negativ angetroffener *Al*-Elektrode zum Teil nicht oder nur sehr schwach erhielt. Die Zahlen der Tabellen VII und VIII erhielt ich, als durch den Strom die *Al*-Oberfläche bläulich angelaufen war. Auch beim *Pt* tritt etwas ähnliches ein, wenn auch nicht so ausgeprägt. Es zeigte sich immer, daß nach einiger Benutzung die frisch geschmirgelten, resp. ausgeglühten Elektroden für die hier in Betracht kommenden Effekte geeigneter waren. Ob hierbei die Gasabgabe der Elektroden oder direkt die Oberflächenbeschaffenheit maßgebend ist, lasse ich dahin gestellt. Für *Pt* sind die Auslösungseffekte etwa die gleichen, wie oben in Tabelle IV. In Anbetracht der geringeren getroffenen Oberfläche (die ja schief steht) sind sie aber größer. Viel mehr ist dies noch beim *Al* der Fall. Die Erklärung ist hier wohl ohne Zweifel darin zu finden, daß die schnellen Strahlen, die bei parallelen Elektroden, wie oben in Tabelle III wegen ihrer großen Weglänge unwirksam sind, hier zu einem Teil nicht geradeaus in Richtung der Stromlinien laufen, sondern auf die gegenüberliegende Glaswand treffen, dort machen sie δ-Strahlen frei, die das schwache Gefälle, das sich in einiger Entfernung von der Kathode auszubilden beginnt, noch mehr schwächen, da sie dort infolge ihrer starken Absorption beträchtliche Leitfähigkeit erzeugen. Ist hierbei, wie in Tabelle V und VII, die zweite Elektrode, die unbestrahlt ist, nicht geerdet, so daß sie ebenfalls negatives Potential annimmt, so werden sämtliche an der Glaswand freiwerdenden Strahlen in die Strombahn zum Fenster hin getrieben. Es ist demnach durchaus verständlich, daß in diesem Falle die Erniedrigung des Entladungspotentials viel beträchtlicher ist als wenn die nicht bestrahlten Elektroden geerdet sind (VI und VIII).

Es ist hiernach selbstverständlich, daß das gleiche dann eintreten wird, wenn die der Elektrode gegenüber befindliche Wand aus irgend einem andern Material besteht, da ja an allen Materialien δ-Strahlen frei werden, wenn Kathodenstrahlen sie treffen. In dem Nullapparat der Geschwindigkeitsmessung ist der Faradayzylinder parallel zu der schief stehenden bestrahlten *Pt*-Elektrode angebracht, dort treffen also die schnellen Strahlen die am *Pt* frei werden zum Teil auf die Hülle des Faradayzylinders und zum Teil auf die Glas-

wand. Die Zylinderhülle bildet mit der Elektrode einen Kondensator sehr geringer Reaktanz. Infolgedessen hat sie, wie hier die Glaswand, ein Potential von etwas anderer Größe, aber von im wesentlichen so geringer Phasenverschiebung, daß sie während der weitaus größten Zeit der Schwingung, gleiches Vorzeichen wie die Elektrode selbst hat. Die langsamen Elektronen, resp. die δ-Strahlen, werden deshalb nicht den gleichen Weg einschlagen, wie der Wechselstrom; vielmehr werden sie, falls die Elektrode stark negativ, der Faradayzylinder schwach negativ ist, sich im wesentlichen in Richtung der maximalen Potentialdifferenz, also zum Fenster hin bewegen. Die schnellen Elektronen aber treffen auf die Zylinderhülle und die Glaswand und machen dort δ-Strahlen frei, die alsdann ihrerseits ihren Weg in der Richtung zum Fenster nehmen müssen, da sie durch das negative Feld der Elektrode und der Hülle abgestoßen werden. Auf die Verhältnisse bei positiver Phase wird gleich eingegangen werden.

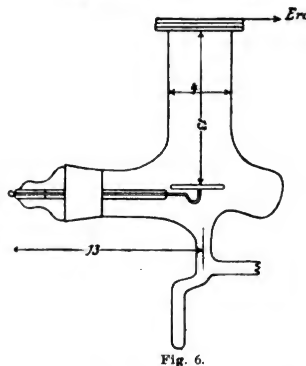


Fig. 6.

Daß bei den oben angegebenen Versuchen der nicht geerdeten Elektrode keine wesentliche Bedeutung zukommt, wurde dadurch gezeigt, daß sie und das Fenster ihr gegenüber entfernt werden konnte, ohne die angegebenen Zahlen merklich zu beeinflussen. Die freigelassene Elektrode hat ja nur das Potential des Glases. Auch das Ersetzen der Hohlelektroden durch ebene war ohne beträchtlicheren Einfluß. Es möge deshalb hier nur noch eine Zahlentabelle angeführt werden, die mit dem Glasrohr Fig. 6 angestellt ist. Hierbei ist die ebene *Pt*-Elektrode durch einen Schliff drehbar.

Tabelle IX.

$Pt_{(+)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$ *Horizontal*		$Pt_{(-)}$ $\text{Fenster}_{\text{Erde}}$ *Horizontal*	
mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen	mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
760	580	510	840
750	570	520	830
780	570	510	850

Tabelle X.

$Pt_{(+)}$ Fenster$_{Erde}$ 30 Grad Schiefstellung		$Pt_{(-)}$ Fenster$_{Erde}$ 30 Grad Schiefstellung	
mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen	mit Röntgen-Strahlen	ohne Röntgen-Strahlen
760	580	520	890
760	560	510	880
780	560	520	890

Aus Tabelle IX und X ist zunächst ersichtlich, daß sowohl der Effekt bei positiv angetroffener Elektrode, wie der bei negativ angetroffener, mit Rücksicht auf die Größe der angetroffenen Oberfläche, wesentlich stärker ist, wenn die Elektrode schräg, als wenn sie horizontal steht. Hierbei fällt auf, daß auch bei Horizontalstellung der positiven Elektrode eine beträchtliche Übergangs-Erschwerung eintritt, während oben in Tabelle IV kein Einfluß bei positiver Ladung und Horizontalstellung beobachtet werden konnte. Da der in die Augen springendste Unterschied zwischen Fig. 4 und Fig. 6 darin liegt, daß im ersten Falle die Glaswände die Elektrode ganz dicht umschließen, im zweiten aber beträchtlicher Spielraum zwischen Elektrode und Glaswand ist, so wurden zunächst die Bedingungen der Fig. 4 dadurch zu reproduzieren versucht, daß in eine Röhre vom Charakter der Fig. 6 ein Glaszylinder so hineingebracht wurde, daß die Elektrode von ihm eng umschlossen wurde. Das Resultat war, daß hierdurch der positive Effekt um etwa 30% verringert wurde, also doch noch so deutlich bestehen blieb, daß die Diskrepanz nur zum Teil dem fehlenden Zwischenraum zwischen Glaswand und Elektrode zugeschrieben werden kann. Es ist demnach das wahrscheinlichste, daß hier gewisse Oberflächenbeschaffenheiten in dem Rohr Fig. 4 sich geltend machen, die allein in diesem Falle ein Inerscheinungtreten des positiven Effektes verhinderten, da sonst in *sämtlichen* Versuchen diese Erscheinung beobachtet wurde. Auf diesen positiven Effekt, der hier völlig unerwartet in die Erscheinung trat, wird in folgendem näher eingegangen.

VI.

Die Erhöhung des Entladungspotentials bei positiv angetroffener Elektrode.

Aus den angeführten Experimenten ergibt sich, daß unter dem Einfluß der Röntgenstrahlen solche Veränderungen an einer Elektrode,

Verzögerungserscheinung, d. h. die beträchtliche Zeit, die vergeht, bevor nach Abblenden der Röntgenstrahlen die Entladung bei positiver Elektrode einsetzt, ist der Polarität des Entladungseffektes im Nullapparat durchaus günstig: Denn der Anstieg des Anodenfalles ist bedingt durch negative Ionen, die sich in der Umgebung der Anode bilden. Erst nachdem dieses negative Polarisationsgebiet an der Anode verschwunden ist, steigt der Kathodenfall. Der Versuch zeigt, daß dies längere Zeit dauert nach Abblenden der Strahlen. — Es wird also im Nullapparat, im Falle Antreffens der positiven Phase, dieses Polarisationsgebiet, wenn es sich gebildet hat, auch in der folgenden negativen, unbestrahlten Phase fortbestehen. Dort wirkt es aber derart, daß der Kathodenfall heruntergeht und geschwächt wird, da ja das für die Glimmentladung hinreichende Gefälle ein positives Polarisationsgebiet an der Kathode fordert. Das negative Gefälle wird also dadurch noch mehr geschwächt, und da es bereits ohne diese Schwächung nicht zur Glimmentladung ausreichte, so wird jetzt a fortiori in der unbestrahlten Phase keine Entladung erfolgen können.

Die mehrfach beschriebene Tatsache, daß bei richtiger Anordnung meines Apparates nur bei den größten negativen Potentialamplituden eine leuchtende Feldentladung bei der Bestrahlung einsetzt, nicht aber bei positiv angetroffenen, ist, wie ich denke hier für sich, getrennt vom Apparat, als notwendig bewiesen. *Diesen Beweis und die hieraus sich ergebende wesentliche Stütze für die Richtigkeit meiner Auffassung von den Vorgängen im Apparat zur Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen, möchte ich als wesentlichstes Resultat vorliegender Untersuchung betrachten.*

Physik. Inst. Leipzig. Ende Juli 1908.

Druckfertig erklärt 6. X. 1908.

welche in positiver Ladung angetroffen wird, eintreten, daß das Einsetzen der Entladung beträchtlich *erschwert* wird. Nun hängt nach obigen Ausführungen über das Zustandekommen der Glimmentladung diese in erster Linie davon ab, daß der Kathodenfall eine bestimmte untere Grenze erreicht; wird das Erreichen dieser Grenze verhindert, so tritt keine Glimmentladung ein. Dieses Herabdrücken des maßgeblichen Kathodengefälles kann nun bei konstantem, anliegendem Potential seinen Grund darin haben, daß an einer anderen Stelle der Strombahn eine Erhöhung des Gefälles eintritt. Eine solche Erhöhung wird allgemein an den Elektroden dann eintreten, wenn die Polarisationsgebiete, welche sich um die Elektroden bilden, anwachsen. Wie man nämlich aus der Gestalt des Gradienten vor Eintritt der Glimmentladung ersieht, ist in der Nähe der Anode freie negative Elektrizität vorhanden. Ein Steigern dieser freien negativen Elektrizität an der Anode hat ein Anwachsen des Anodenfalles zur Folge. Diese Steigerung muß dann eintreten, wenn Röntgenstrahlen auf die Elektrode fallen, welche ein Potential von einigen hundert Volt hat. Denn die Kathodenstrahlen, welche an der bestrahlten Elektrode frei werden, bestehen nicht nur aus den schnellen Dornschen (β-Strahlen) und den ganz langsamen δ-Strahlen, sondern auch aus solchen Strahlen, die einer Geschwindigkeit entsprechen, die durch einige hundert Volt derart beeinflußt werden, daß sie auf kurzen freien Wegstrecken existenzfähig sind. Es entstehen negative Ionen und Elektronionen. Durch diese muß die negative Volumladung an der Anode erhöht werden, es muß also der Anodenfall steigen, was gleichzeitig, da die Klemmenspannung konstant ist, ein Sinken des Kathodenfalles zur Folge haben muß. Dann aber muß sich eine Erschwerung des Einsetzens der Glimmentladung einstellen. *Man wird also bei positiv angetroffener Elektrode eine größere Potentialdifferenz während der Bestrahlung anlegen können, als ohne Bestrahlung.*

Jeder Vorgang, welcher die negative Volumladung an der Elektrode erhöht, wird in gleicher Richtung wie hier die direkt ankommenden Röntgenstrahlen wirken. Wenn demnach die Bedingungen derart sind, daß die Gesamtheit der bei Röntgenbestrahlung freiwerdenden Kathodenstrahlen, also nicht nur die langsamen, sondern auch die schnellen, freie negative Elektrizität an die Anode schaffen können, so wird man erwarten müssen, daß der Erschwerungseffekt zunimmt. Dies ist aber der Fall, wenn die Elektrode schräg gestellt ist, und ihr gegenüber sich eine Wand befindet, die ein Potential

hat, das nur wenig geringer ist, als das der Elektrode. Dann treffen nämlich alle Kathodenstrahlen, auch die schnellen, die durch die Röntgenstrahlen an der Elektrode frei werden, auf die Wand. Dort erzeugen sie δ-Strahlen, die sich nun in dem schwachen Felde zwischen Anode und Wand zur Anode bewegen, und an der Anode die freie negative Volumladung erhöhen. Hiernach ist also die beträchtliche Erhöhung der Entladeerschwerung bei Schiefstellung der Anode, der Mitwirkung der schnellen β-Strahlung zu danken, die an der bestrahlten Elektrode selbst frei wird, und die bei Horizontalstellung für die Anreicherung von negativer Elektrizität an der Anode wegen der Größe der freien Weglänge nicht in Betracht kommt.

In dem Nullapparat müssen infolge der oben wiederholt diskutierten analogen Verhältnisse gleiche Vorgänge in Erscheinung treten. Nur sind dort wegen des höheren Druckes und höheren Potentials die charakteristischen Teile der Entladung räumlich viel mehr konzentriert. Es muß auch hier bei angetroffener +Elektrode die Entladung erschwert, bei angetroffener —Elektrode erleichtert werden. Hierzu kommen noch zwei weitere Umstände. Erstens ein beträchtlicher Entladeverzug bei +Elektrode. Es zeigt sich nämlich, daß die Ausbildung des Glimmlichtes im Falle, daß die *Pt*-Elektrode positiv ist, nicht sofort erfolgt, sondern daß benachbart zu dem Potential, das sich noch dauernd anlegen läßt, sich ein Gebiet befindet, innerhalb dessen das Potential für kurze Zeit ohne Eintritt der Entladung anlegbar ist. Bei negativem *Pt* ist ein solches Gebiet, das einen merklichen hier nach Sek. zählenden Entladeverzug zeigt, von mir nicht beobachtet worden. Ferner aber hat in diesem Apparat das *Al*-Fenster eine viel kleinere Oberfläche als die *Pt*-Elektrode. Die Folge davon ist, daß die Entladung schwerer einsetzte, wenn das Fenster Kathode ist, als wenn es Anode ist. In der Tat kann man etwa das doppelte Potential im ersten Falle anlegen als im zweiten. Für die Verhältnisse im Nullapparat kommt der, hier zuerst beobachtete, positive Erschwerungseffekt nicht direkt in Betracht. Denn dort wird das Potential so reguliert, daß ohne Bestrahlung eine Entladung überhaupt nicht stattfindet. Für die Funktion dieses Apparates wäre hinreichend, daß keine Erleichterung der Feldentladung bei positiv angetroffener Elektrode statt hat, was allein bisher in der Theorie des Apparates von mir zu erklären versucht wurde. Daß aber sogar eine Erschwerung stattfindet, war nicht vorausgesehen, ist aber für die Zuverlässigkeit des Funktionierens sicherlich ein nicht unbeträchtlicher Sicherheitsfaktor. Auch die

Verzögerungserscheinung, d. h. die beträchtliche Zeit, die vergeht, bevor nach Abblenden der Röntgenstrahlen die Entladung bei positiver Elektrode einsetzt, ist der Polarität des Entladungseffektes im Nullapparat durchaus günstig: Denn der Anstieg des Anodenfalles ist bedingt durch negative Ionen, die sich in der Umgebung der Anode bilden. Erst nachdem dieses negative Polarisationsgebiet an der Anode verschwunden ist, steigt der Kathodenfall. Der Versuch zeigt, daß dies längere Zeit dauert nach Abblenden der Strahlen. — Es wird also im Nullapparat, im Falle Antreffens der positiven Phase, dieses Polarisationsgebiet, wenn es sich gebildet hat, auch in der folgenden negativen, unbestrahlten Phase fortbestehen. Dort wirkt es aber derart, daß der Kathodenfall heruntergeht und geschwächt wird, da ja das für die Glimmentladung hinreichende Gefälle ein positives Polarisationsgebiet an der Kathode fordert. Das negative Gefälle wird also dadurch noch mehr geschwächt, und da es bereits ohne diese Schwächung nicht zur Glimmentladung ausreichte, so wird jetzt a fortiori in der unbestrahlten Phase keine Entladung erfolgen können.

Die mehrfach beschriebene Tatsache, daß bei richtiger Anordnung meines Apparates nur bei den größten negativen Potentialamplituden eine leuchtende Feldentladung bei der Bestrahlung einsetzt, nicht aber bei positiv angetroffenen, ist, wie ich denke hier für sich, getrennt vom Apparat, als notwendig bewiesen. *Diesen Beweis und die hieraus sich ergebende wesentliche Stütze für die Richtigkeit meiner Auffassung von den Vorgängen im Apparat zur Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen, möchte ich als wesentlichstes Resultat vorliegender Untersuchung betrachten.*

Physik. Inst. Leipzig. Ende Juli 1908.

Druckfertig erklärt 6. X. 1908.

INHALT.

Seite

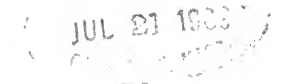
J. E. Lilienfeld, Über neuartige Erscheinungen in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung. Mit 2 Figuren im Text . . 212

Franz Etzold, Zehnter Bericht der Erdbebenstation Leipzig . . 223

C. Neumann, Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. Dritte Abhandlung 240

Erich Marx, Über den Einfluß der Röntgenstrahlen auf das Einsetzen der Glimmentladung. Mit 6 Figuren im Text 248

Druck von B. G. Teubner in Leipzig



BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

VII

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1908.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pf.

SITZUNG VOM 26. OKTOBER 1908.

1. Herr NEUMANN legt für die „Berichte" eine Abhandlung vor: Über die Entwicklung der ganzen Potenzen der reziproken Entfernung zweier Punkte nach Kugelfunktionen.
2. Herr ROHN trägt für die „Berichte" vor über die Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen 2. Grades.
3. Für die Verwendung der annähernd 1000 Mk. betragenden Zinsen der Göttinger Stiftung werden folgende Beschlüsse gefaßt:
   a. Das Stipendium wird ungeteilt und nur an einen Bewerber im Jahre vergeben.
   b. Wenn der Betrag von 1000 Mk. nicht erreicht ist, wird der Rest kapitalisiert bzw. dem nächstjährigen Stipendium hinzugefügt.
   c. Die Verleihung läuft mit dem Datum des Beschlusses und auf ein Jahr.
   d. Das Stipendium gilt für alle in der Klasse vertretenen Fächer; den Physikern ist bei der Verleihung kein Vorrang einzuräumen.
4. Herrn Dr. LILIENFELD werden zur Fortsetzung physikalischer Untersuchungen 900 Mk. aus der Göttinger Stiftung bewilligt.
5. Geschäftliche Mitteilungen.

Über die Entwicklung der ganzen Potenzen der reziproken Entfernung zweier Punkte nach Kugelfunktionen.

Von

C. Neumann.

§ 1.

Es handelt sich hier um die Entwicklung des Ausdruckes

$$(\text{A.})\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\gamma}}\right)^h$$

nach den Kugelfunktionen $P_n(\cos\gamma)$. Dabei soll der Exponent h eine gegebene positive ganze Zahl sein.

Für $h = 1$ ist die Entwicklung bekannt. Sie lautet:

$$(\text{A. I.})\qquad \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\gamma}} = \sum_0^\infty \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\gamma),$$

vorausgesetzt, daß $r < r_1$ ist. *Neu* aber dürfte sein, daß man auch für $h = 2$ zu einem recht einfachen Resultat gelangen kann, nämlich zu folgender Formel:

$$(\text{A. II.})\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\gamma}}\right)^2 = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4 r r_1} Q_n\left(\frac{r^2 + r_1^2}{2 r r_1}\right) P_n(\cos\gamma).$$

Auch ist merkwürdigerweise diese Formel (A. II.) ganz allgemein gültig, einerlei ob $r < r_1$ oder $r > r_1$ ist. Als Faktor von $P_n(\cos\gamma)$ tritt in der Formel derjenige Wert auf, den die Kugelfunktion zweiter Art $Q_n(x)$ annimmt für das Argument $x = \dfrac{r^2 + r_1^2}{2 r r_1}$.

Ich werde den Beweis der Formel (A. II.) im folgenden Paragraph geben. Übrigens folgt uns (A. I.) und (A. II) sofort:

$$(\text{A. III.})\quad \left[\sum_0^\infty \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\gamma)\right]^2 = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4 r r_1} Q_n\left(\frac{r^2 + r_1^2}{2 r r_1}\right) P_n(\cos\gamma);$$

und es wird also einerlei sein, ob man die Formel (A. II.) oder die Formel (A. III.) zu beweisen sucht.

Einstweilen möchte ich nur noch bemerken, daß man, auf Grund der Formel (A. I.), zur Entwicklung des Ausdruckes (A.) für $h = 3, 5, 7, \ldots$, andererseits aber, auf Grund der Formel (A. II.), zur Entwicklung dieses Ausdruckes (A.) für $h = 4, 6, 8, \ldots$ gelangen kann. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$\text{(B.)} \qquad \Delta^2 = r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\gamma ,$$

und nimmt man an, die Entwicklung

$$\text{(C.)} \qquad \left(\frac{1}{\Delta}\right)^h = \sum_0^\infty F_n P_n(\cos\gamma)$$

sei bereits gefunden, der Art, daß die F_n völlig bekannte Funktionen von r und r_1 vorstellen, so kann man, auf Grund dieser Formel (C.), leicht zu einer analogen Formel *für den Exponenten:* $h + 2$ gelangen, und zwar in folgender Weise:

Durch Differentiation der Formel (C.) nach r, respektive nach r_1, und mit Rücksicht auf (B.), erhält man:

$$-\left(\frac{h}{\Delta^{h+1}}\right)\frac{r - r_1\cos\gamma}{\Delta} = \sum_0^\infty \frac{\partial F_n}{\partial r} P_n(\cos\gamma),$$

$$-\left(\frac{h}{\Delta^{h+1}}\right)\frac{r_1 - r\cos\gamma}{\Delta} = \sum_0^\infty \frac{\partial F_n}{\partial r_1} P_n(\cos\gamma)\cdot$$

Multipliziert man aber diese Formeln mit r, respektive mit $-r_1$, und addiert, so erhält man sofort:

$$-\frac{h(r^2 - r_1^2)}{\Delta^{h+2}} = \sum_0^\infty\left(r\frac{\partial F_n}{\partial r} - r_1\frac{\partial F_n}{\partial r_1}\right) P_n(\cos\gamma),$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{(D.)} \qquad \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{h+2} = \sum_0^\infty \Phi_n P_n(\cos\gamma),$$

wo Φ_n die Bedeutung hat:

$$\text{(d.)} \qquad \Phi_n = -\left(\frac{1}{h}\right)\frac{r\frac{\partial F_n}{\partial r} - r_1\frac{\partial F_n}{\partial r_1}}{r^2 - r_1^2} .$$

In solcher Weise kann man also, wenn die Entwicklung (C.) bereits bekannt ist, sofort hingelangen zur Entwicklung (D.). — *Q. e. d.*

§ 2.

Es handelt sich hier um den Beweis der Formel (A. II.), oder, was auf dasselbe hinauskommt, um den Beweis der Formel (A. III.).

Jn der xy Ebene mögen irgend zwei Punkte p, p_1 markiert sein mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, x_1, y_1 und mit den elliptischen Koordinaten λ, ϑ, λ_1, ϑ_1; so daß also die Relationen zu notieren sind:

$$(1)\quad p\begin{cases} x = \frac{k}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda})\cos\vartheta, \\ y = \frac{k}{2}(e^{\lambda} - e^{-\lambda})\sin\vartheta, \end{cases} \qquad p_1\begin{cases} x_1 = \frac{k}{2}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1})\cos\vartheta_1, \\ y_1 = \frac{k}{2}(e^{\lambda_1} - e^{-\lambda_1})\sin\vartheta_1, \end{cases}$$

wo k eine *positive* Konstante (die halbe Brennlinie), vorstellt, und wo λ und λ_1 ebenfalls *positiv* zu denken sind[1]).

Für den gegenseitigen Abstand (pp_1) der beiden Punkte gilt die Formel: $(pp_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$. Und diese Formel gewinnt, durch Einführung der in (1.) angegebenen elliptischen Koordinaten, die Gestalt[2]):

$$(2)\quad (pp_1)^2 = k^2[\cos i(\lambda + \lambda_1) - \cos(\vartheta + \vartheta_1)][\cos i(\lambda - \lambda_1) - \cos(\vartheta - \vartheta_1)],$$

wo $i = \sqrt{-1}$ sein soll. Setzt man nun

$$(3)\qquad u = e^{-(\lambda_1 + \lambda)} \quad \text{und} \quad v = e^{-(\lambda_1 - \lambda)},$$

ferner

$$(4)\qquad \sigma = \vartheta + \vartheta_1 \quad \text{und} \quad \delta = \vartheta - \vartheta_1,$$

so geht die Formel (2) über in:

$$(5)\qquad (pp_1)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{(1 - 2u\cos\sigma + u^2)(1 - 2v\cos\delta + v^2)}{uv};$$

woraus sich ergibt:

$$(6)\qquad \frac{1}{(pp_1)} = \frac{2\sqrt{uv}}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2u\cos\sigma + u^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2v\cos\delta + v^2}}\right].$$

Nimmt man nun an, daß zwischen den beiden *positiven* Größen λ und λ_1 die Relation stattfindet: $\lambda < \lambda_1$, so sind die in (3.) eingeführten Größen u, v als *positive echte Brüche* zu bezeichnen; so

1) Vgl. die Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Dezember 1906, Seite 491 (1.) ff. Dort ist (auf Seite 491) festgesetzt, daß λ zwischen 0 und ∞ liegen soll, daß also dieses Argument λ stets *positiv* zu denken ist.

2) a. a. O. Seite 492 (10).

daß man also, unter Anwendung der allgemeinen Formel (A. I.), zu folgenden Entwicklungen gelangt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2u\cos\sigma + u^2}} = \sum_0^\infty u^n P_n(\cos\sigma),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2v\cos\delta + v^2}} = \sum_0^\infty v^n P_n(\cos\delta);$$

durch welche die Formel (6) übergeht in:

$$(7) \qquad \frac{1}{(pp_1)} = \frac{2\sqrt{uv}}{k}\left[\sum_0^\infty u^n P_n(\cos\sigma)\right]\left[\sum_0^\infty v^n P_n(\cos\delta)\right].$$

Nun können wir aber diesen reziproken Wert von (pp_1) zum zweiten Mal entwickeln, und zwar *nach einer ganz anderen Methode.* Zu diesem Zwecke geben wir den Ausdrücken (1) die Gestalt:

$$(8) \quad p\begin{cases} x = k\varrho\cos\vartheta, \\ y = k\sqrt{\varrho^2 - 1}\sin\vartheta, \end{cases} \qquad p_1\begin{cases} x_1 = k\varrho_1\cos\vartheta_1, \\ y_1 = k\sqrt{\varrho_1^2 - 1}\sin\vartheta_1; \end{cases}$$

hier haben alsdann ϱ und ϱ_1 die Bedeutungen:

$$(9) \qquad \varrho = \tfrac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda}) \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \tfrac{1}{2}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1});$$

wofür man, mit Hinblick auf die aus (3) entspringenden Relationen:

$$\frac{u}{v} = e^{-2\lambda} \quad \text{und} \quad uv = e^{-2\lambda_1},$$

auch schreiben kann:

$$(10) \qquad \varrho = \frac{u+v}{2\sqrt{uv}} \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \frac{1+uv}{2\sqrt{uv}}.$$

Da zwischen den positiven Größen λ und λ_1 die Relation festgesetzt wurde: $\lambda < \lambda_1$, so ist nach (9) auch $\varrho < \varrho_1$. Und mit Rücksicht hierauf erhalten wir nun, auf Grund der Formeln (8), für den reziproken Wert der Entfernung (pp_1) folgende Entwicklung[1]):

$$(11) \quad \frac{1}{(pp_1)} = \frac{1}{2k}\sum_0^\infty (2n+1)\cdot P_n(\varrho)\,P_n(\cos\vartheta)\cdot Q_n(\varrho_1)\,P_n(\cos\vartheta_1) + etc.$$

---

1) Es ergibt sich nämlich diese Entwicklung aus den F. NEUMANNschen Untersuchungen vom Jahre 1847. Man vergleiche F. NEUMANN's Vorlesungen über Potential- und Kugelfunktionen, Leipzig bei Teubner. 1887, Seite 333 (7) und Seite 341 (34) ff. Die dortigen Winkel φ und φ_1 sind hier $= 0$. Die dortigen Buchstaben μ und μ_1 haben die Bedeutungen $\mu = \cos\vartheta$ und $\mu_1 = \cos\vartheta_1$. Endlich ist die dortige Konstante a hier mit k bezeichnet. Im übrigen sind die Bezeichnungen hier genau dieselben wie dort.

Die hier durch das *etc.* angedeuteten Glieder sind behaftet mit den Faktoren:

$$(12) \qquad P_{n1}(\varrho),\ P_{n2}(\varrho),\ P_{n3}(\varrho),\ P_{n4}(\varrho),\ \ldots,$$

und *verschwinden* also z. B. für $\varrho = 1$. Denn es ist bekanntlich:

$$P_{nj}(\varrho) = \left(\sqrt{1-\varrho^2}\right)^j \frac{d^j P_n(\varrho)}{d\varrho^j}.$$

Setzen wir nun die Ausdrücke (7) und (11) einander gleich, indem wir dabei zugleich für σ, δ und ϱ, ϱ_1 die Werte (4) und (10) substituieren, so erhalten wir:

$$(13) \qquad \left[\sum_0^\infty u^n P_n(\cos(\vartheta + \vartheta_1))\right]\left[\sum_0^\infty v^n P_n(\cos(\vartheta - \vartheta_1))\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{uv}} \sum_0^\infty (2n+1) \cdot P_n\left(\frac{u+v}{2\sqrt{uv}}\right) P_n(\cos\vartheta) \cdot Q_n\left(\frac{1+uv}{2\sqrt{uv}}\right) P_n(\cos\vartheta_1) + etc.$$

Diese Formel (12) wird, wie aus ihrer Symmetrie hervorgeht, ganz allgemein gelten, einerlei ob $u < v$ oder $u > v$ ist. Nur ist an der Vorstellung festzuhalten, daß u und v positive echte Brüche sind.

Wir machen jetzt $u = v$, also [nach (10)] $\varrho = 1$. Alsdann *verschwinden* in der Formel (13) die durch das *etc.* angedeuteten Glieder; so daß also diese Formel alsdann folgende überaus einfache Gestalt erhält:

$$(14) \qquad \left[\sum_0^\infty u^n P_n(\cos(\vartheta + \vartheta_1))\right]\left[\sum_0^\infty u^n P_n(\cos(\vartheta - \vartheta_1))\right]$$

$$= \frac{1}{4u} \sum_0^\infty (2n+1)\, P_n(\cos\vartheta) \cdot Q_n\left(\frac{1+u^2}{2u}\right) P_n(\cos\vartheta_1);$$

denn $P_n(1)$ ist bekanntlich $= 1$. — Setzt man endlich hier, in (14), den Winkel $\vartheta_1 = 0$, so erhält man:

$$(15) \qquad \left[\sum_0^\infty u^n P_n(\cos\vartheta)\right]^2 = \frac{1}{4u} \sum_0^\infty (2n+1)\, P_n(\cos\vartheta)\, Q_n\left(\frac{1+u^2}{2u}\right).$$

Macht man jetzt $u = \frac{r}{r_1}$, indem man $r < r_1$ sich vorstellt, so folgt:

$$(16) \qquad \left[\sum_0^\infty \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\vartheta)\right]^2 = \frac{r_1}{4r} \sum_0^\infty (2n+1)\, P_n(\cos\vartheta)\, Q_n\left(\frac{r^2+r_1^2}{2rr_1}\right);$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$(17) \qquad \left[\sum_0^\infty \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\vartheta)\right]^2 = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4rr_1}\, Q_n\left(\frac{r^2+r_1^2}{2rr_1}\right) P_n(\cos\vartheta).$$

Dies aber ist die zu beweisende Formel (A. III.), nur ist das dortige γ hier durch den Buchstaben ϑ ersetzt. — *Q. e. d.*

§ 3.

Die Formel (14) dürfte durch ihre Einfachheit von besonderer Wichtigkeit sein. Vorhin wurde in ihr $\vartheta_1 = 0$ gesetzt. Von Interesse aber dürften vielleicht auch diejenigen Resultate sein, welche sich aus ihr für $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_1 = 2\vartheta$, $\vartheta_1 = 3\vartheta$, etc. ergeben. So z. B. gelangt man für $\vartheta_1 = \vartheta$ zu folgender Formel:

$$(18) \qquad \left[\sum_0^\infty u^n P_n(\cos 2\vartheta)\right]\left[\sum_0^\infty u^n\right] = \\ = \frac{1}{4u}\sum_0^\infty (2n+1)\, Q_n\left(\frac{1+u^2}{2u}\right)[P_n(\cos\vartheta)]^2;$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$(19) \qquad \sum_0^\infty u^n P_n(\cos 2\vartheta) = \\ = \frac{1-u}{4u}\sum_0^\infty (2n+1)\, Q_n\left(\frac{1+u^2}{2u}\right)[P_n(\cos\vartheta)]^2.$$

Hier stehen *linker* Hand die Funktionen:

$$(20) \qquad P_1(\cos 2\vartheta),\ P_2(\cos 2\vartheta),\ P_3(\cos 2\vartheta),\ \ldots$$

und die Formel (19) dürfte, bei geeigneter Behandlung, die Mittel darbieten, um *jedwede* dieser Funktionen (20) in eine Reihe zu entwickeln, die fortschreitet nach den *Quadraten* der Kugelfunktionen $P_n(\cos\vartheta)$.

Druckfertig erklärt 27. XI. 1908.]

Beiträge zur Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiten Grades.

Von

K. Rohn.

Die vorliegende Note verfolgt einen doppelten Zweck; sie soll einerseits eine frühere Arbeit des Verfassers aus den Sitzungsberichten vom 2. Dezember 1901 ergänzen und erweitern; sie soll andererseits die invariantentheoretische Lösung des Problems für den Fall geben, daß sechs von den acht Punkten als Schnittpunkte einer Raumkurve 3. Ordnung mit einer Fläche zweiten Grades bestimmt sind.

Indem ich mich der früheren Bezeichnungsweise bediene und acht ganz beliebige Punkte mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 benenne, setze ich kurz:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & w_i \\ x_k & y_k & z_k & w_k \\ x_l & y_l & z_l & w_l \\ x_m & y_m & z_m & w_m \end{vmatrix} = |iklm|,$$

wobei i, k, l, m irgend vier der Zahlen 1, 2, . . ., 8 bedeuten. Dann besteht die Identität:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &|iklm|\cdot|pqrs| + |iklp|\cdot|qrsm| + |iklq|\cdot|rsmp| \\ &\quad + |iklr|\cdot|smpq| + |ikls|\cdot|mpqr| \equiv 0, \end{aligned}$$

wenn i, k, l, m, p, q, r, s die Zahlen 1, 2, 3, . . , 8 in irgend einer Reihenfolge darstellen. Aus ihr folgen die beiden weiteren:

$$\text{(Ia)}\quad \begin{aligned} &|iklm|\cdot|ipqr| - |iklp|\cdot|iqrm| + |iklq|\cdot|irmp| \\ &\quad - |iklr|\cdot|impq| \equiv 0, \end{aligned}$$

$$\text{(Ib)}\quad |iklm|\cdot|ikpq| + |iklp|\cdot|ikqm| + |iklq|\cdot|ikmp| \equiv 0.$$

Liegen insbesondere die acht Punkte auf drei Flächen 2. Grades, so besteht die Relation:

$$\text{(II)} \qquad \frac{|ikpr|\cdot|ikqs|}{|ikps|\cdot|ikqr|} = \frac{|lmpr|\cdot|lmqs|}{|lmps|\cdot|lmqr|}.$$

Sie sagt aus, daß die vier Punkte p, q, r, s mit den Achsen ik bzw. lm je vier Ebenen von gleichem Doppelverhältnis bestimmen. Der Relation (II) kann man auch die Form geben:

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{|rikp|\cdot|rlmq|}{|sikp|\cdot|slmq|} = \frac{|rikq|\cdot|rlmp|}{|sikq|\cdot|slmp|}.$$

Der Ausdruck linker Hand bleibt also bei der Vertauschung von p und q ungeändert. In gleicher Weise erkennt man, daß der Ausdruck linker Hand immer denselben Wert behält, wenn man unter Festhalten von r und s die übrigen sechs Zahlen i, k, l, m, p, q beliebig permutiert.

Das gleiche Resultat liefert auch die Tatsache, daß alle Flächen 2. Gr. durch die sechs Punkte i, k, l, m, p, q auf der Geraden rs eine Involution ausschneiden, zu der auch das Punktepaar r, s gehört. Bezeichnen wir etwa mit x_0, y_0, z_0, w_0 die Koordinaten eines variabeln Punktes o, so schneiden die Ebenen $|oikp| = 0$ und $|olmq| = 0$ die Gerade rs in den Punkten $(r - k's)$ und $(r - k''s)$, wo $k' = |rikp| : |sikp|$ und $k'' = |rlmq| : |slmq|$ ist. Dieses Punktepaar gehört der genannten Involution an; neun weitere Punktepaare von ihr erhält man bei beliebiger Permutation der sechs Zahlen i, k, l, m, p, q. Da auch r, s ein Punktepaar der Involution ist, hat man:

$$\text{(IIb)} \qquad \frac{|rikp|\cdot|rlmq|}{|sikp|\cdot|slmq|} = \varrho_{rs},$$

wobei ϱ_{rs} ungeändert bleibt bei beliebiger Vertauschung der sechs Zahlen i, k, l, m, p, q; so daß sich linker Hand zehn verschiedene Ausdrücke für ϱ_{rs} ergeben.

Die 56 Größen ϱ genügen den Gleichungen:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} \varrho_{rs}\cdot\varrho_{sr} &= 1, \\ \varrho_{rs} &= -\varrho_{rq}\cdot\varrho_{qs}, \end{aligned}$$

in denen q, r, s irgend drei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, 8$ bedeuten. Denn es ist:

$$\frac{|rikp|\cdot|rlmq|}{|sikp|\cdot|slmq|} = -\frac{|rlms|\cdot|rikp|}{|qlms|\cdot|qikp|}\cdot\frac{|qikp|\cdot|qlmr|}{|sikp|\cdot|slmr|}.$$

Demgemäß lassen sich sämtliche Größen ϱ als Quotienten zweier

der Werte: $\varrho_{12}, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{15}, \varrho_{16}, \varrho_{17}, \varrho_{18}$ darstellen vermöge der Formel: $\varrho_{rs} = -\varrho_{1s} : \varrho_{1r}$.

Dividiert man die Identität (I) durch $|iklm| \cdot |pqrs|$, und setzt:

$$\frac{|pikl|}{|mikl|} = \varrho_{pm} \frac{|mqrs|}{|pqrs|}, \quad \text{sowie:} \quad \frac{|qikl|}{|mikl|} = \varrho_{qm} \frac{|mprs|}{|qprs|} \text{usw.},$$

so erhält man die Relation:

$$\text{(IV)} \quad \varrho_{pm}|mqrs|^2 + \varrho_{qm}|mprs|^2 + \varrho_{rm}|mpqs|^2 + \varrho_{sm}|mpqr|^2 = |pqrs|^2.$$

Ganz analog ergibt sich die Relation:

$$\varrho_{ip}|pklm|^2 + \varrho_{kp}|pilm|^2 + \varrho_{lp}|pikm|^2 + \varrho_{mp}|pikl|^2 = |iklm|^2.$$

Wir betrachten jetzt die beiden Flächen 2. Grades:

$$\text{(V)} \quad \begin{aligned} \mathsf{A} &\equiv \varrho_{pm}|oqrs|^2 + \varrho_{qm}|oprs|^2 + \varrho_{rm}|opqs|^2 + \varrho_{sm}|opqr|^2 = 0, \\ \mathsf{B} &\equiv \varrho_{ip}|oklm|^2 + \varrho_{kp}|oilm|^2 + \varrho_{lp}|oikm|^2 + \varrho_{mp}|oikl|^2 = 0, \end{aligned}$$

wo o wieder den variabeln Punkt bedeutet.

Beide Flächen 2. Grades sind, wie wir sogleich zeigen werden, *identisch, und zwar sind die beiden Tetraeder* $pqrs$ *und* $iklm$ *zugleich Polartetraeder dieser Fläche.*

Zwei Punkte $x_u y_u z_u w_u$ und $x_v y_v z_v w_v$ sind ja in bezug auf $\mathsf{A} = 0$ konjugiert, wenn:

$$\varrho_{pm}|uqrs| \cdot |vqrs| + \varrho_{qm}|uprs| \cdot |vprs| + \varrho_{rm}|upqs| \cdot |vpqs| + \varrho_{sm}|upqr| \cdot |vpqr| = 0$$

ist. Diese Gleichung ist aber erfüllt, sobald man für u und v irgend zwei von den vier Zahlen p, q, r, s setzt. Sie ist aber auch erfüllt, wenn man für u und v irgend zwei von den vier Zahlen i, k, l, m wählt. Denn aus der Identität [vgl. (Ia)]:

$$|klmp| \cdot |kqrs| - |klmq| \cdot |kprs| + |klmr| \cdot |kpqs| - |klms| \cdot |kpqr| \equiv 0$$

folgt, wenn man sie mit $|pqrs| : |iklm|$ multipliziert, die Relation:

$$\varrho_{pi}|iqrs| \cdot |kqrs| + \varrho_{qi}|iprs| \cdot |kprs| + \varrho_{ri}|ipqs| \cdot |kpqs| + \varrho_{si}|ipqr| \cdot |kpqr| = 0.$$

Da nun $\varrho_{pi} : \varrho_{qi} : \varrho_{ri} : \varrho_{si} = \varrho_{pm} : \varrho_{qm} : \varrho_{rm} : \varrho_{sm}$ ist, sagt diese Relation aus, daß die Punkte i und k konjugiert in bezug auf die Fläche $\mathsf{A} = 0$ sind.

Ganz ebenso erkennt man, daß auch die Fläche $\mathsf{B} = 0$ die beiden Polartetraeder $iklm$ und $pqrs$ besitzt. Die Flächen $\mathsf{A} = 0$ und $\mathsf{B} = 0$ fallen sonach zusammen und es muß:

$$\mathsf{A} \equiv \tau \mathsf{B}$$

sein. Die Konstante τ findet man, indem man in A und B die Koordinaten des Punktes m einsetzt; dann kommt nach (IV):

$$|pqrs|^2 = \tau \, |iklm|^2 \cdot \varrho_{mp} \, .$$

Den Beweiß, daß $\mathsf{A} - \tau \mathsf{B} \equiv 0$ ist, kann man sehr leicht auch dadurch erbringen, daß man zeigt, daß jeder der vier Punkte i, k, l, m zu jedem der vier Punkte p, q, r, s konjugiert ist. Das liefert für die Punkte i und p die Bedingung:

$$\varrho_{pm} \, |iqrs| \cdot |pqrs| - \tau \varrho_{ip} \, |iklm| \cdot |pklm| = 0,$$

die sich auf die frühere Relation:

$$\varrho_{ip} = |iqrs| \cdot |iklm| : |pqrs| \cdot |pklm|$$

reduziert.

Wir wenden uns jetzt der Berechnung der Größen ϱ zu. Hierbei gehen wir von der Identität (Ib) aus, multiplizieren sie mit $|pqsm| : |iklr|$ und führen die Werte $\varrho_{mr}, \varrho_{pr}, \varrho_{qr}$ ein.

Sie geht alsdann über in:

$$0 = \varrho_{mr} \, |pqik| \cdot |pqrs| + \varrho_{pr} \, |qmik| \cdot |qmrs| + \varrho_{qr} \, |mpik| \cdot |mprs|.$$

In gleicher Weise findet man:

$$0 = \varrho_{mr} \, |pqir| \cdot |pqks| + \varrho_{pr} \, |qmir| \cdot |qmks| + \varrho_{qr} \, |mpir| \cdot |mpks|.$$

Aus beiden Gleichungen folgt dann:

$$\text{(VI)} \qquad \varrho_{mr} : \varrho_{pr} : \varrho_{qr} =$$

$$|mqik| \cdot |mqrs| \cdot |mpir| \cdot |mpks| - |mpik| \cdot |mprs| \cdot |mqir| \cdot |mqks|$$

$$: |pmik| \cdot |pmrs| \cdot |pqir| \cdot |pqks| - |pqik| \cdot |pqrs| \cdot |pmir| \cdot |pmks|$$

$$: |qpik| \cdot |qprs| \cdot |qmir| \cdot |qmks| - |qmik| \cdot |qmrs| \cdot |qpir| \cdot |qpks|$$

Die vorstehenden Ausdrücke, die den Größen ϱ proportional sind, zeigen nun verschiedene charakteristische Eigenschaften. Zunächst ist zu erwähnen, daß in einem solchen Ausdruck nur sieben von den acht Schnittpunkten dreier Flächen 2. Gr. auftreten, und zwar enthält jeder Ausdruck die Koordinaten *eines* Punktes im vierten, die der sechs übrigen im zweiten Grade. Sodann zeigt sich, daß ein solcher Ausdruck bei Vertauschung von irgend zwei der sechs Punkte, deren Koordinaten darin quadratisch vorkommen,

seinen absoluten Wert beibehält und nur sein Vorzeichen wechselt. Der Nachweis hierfür ist vermöge der Identitäten (Ib) leicht zu führen und kann hier unterdrückt werden. Führen wir die symbolische Bezeichnung ein:

$$\text{(VII)} \quad \varepsilon \cdot m(qikpsr) \equiv |mqik| \cdot |mqsr| \cdot |mpir| \cdot |mpsk| - |mpsr| \cdot |mpik| \cdot |mqsk| \cdot |mqir|,$$

und wählen hierbei für ε die positive oder negative Einheit, je nachdem die Zahlenreihe $(mqikpsr)$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen aufweist, so können wir sagen, daß der Ausdruck $\varepsilon \cdot m(qikpsr)$ völlig ungeändert bleibt bei jeder Permutation der sechs innerhalb der Klammer stehenden Zahlen. Er hängt also nur ab von der Zahl vor der Klammer und den Zahlen innerhalb, jedoch nicht von der Anordnung der letzteren.

Der Ausdruck (VII) steht auch mit gewissen geometrischen Gebilden im engsten Zusammenhang. Ersetzt man einen der sechs Punkte innerhalb der Klammer — etwa den Punkt q — durch den variablen Punkt o, so stellt:

$$m(oikpsr) = 0$$

eine Kegelfläche mit dem Scheitel m *und den fünf Mantellinien* mi, mk, mp, ms, mr dar. Läßt man jedoch den variabeln Punkt o an die Stelle des Punktes m treten, so stellt:

$$o(qikpsr) = 0$$

eine Fläche 4. *Ord. dar, die in den sechs Punkten* q, i, k, p, s, r *Knoten besitzt.* Auf ihr liegen ferner die 15 Verbindungslinien dieser Punkte sowie die 10 Geraden, die als Achsen der zehn Ebenenpaare durch die sechs Punkte auftreten. Diese Fläche 4. Ord. ist durch die Wahl der sechs Knotenpunkte völlig bestimmt.

Aus den Relationen (VI) und (VII) folgt mit Rücksicht auf (III):

$$\varepsilon \cdot m(qikpsr) : \varepsilon' \cdot p(qikmsr) = \varrho_{mr} : \varrho_{pr} = \varrho_{ms} : \varrho_{ps} = \varrho_{mk} : \varrho_{pk} = \varrho_{mi} : \varrho_{pi} = \varrho_{mq} : \varrho_{pq} = \varrho_{mp} : -1.$$

Auch hier ist für ε bzw. ε' der Wert $+1$ oder -1 zu setzen, je nachdem die Zahlenreihe des auf ε bzw. ε' folgenden Symbols eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen aufweist. Es ist also $\varepsilon : \varepsilon' = -1$ und folglich:

$$\text{(VIII)} \quad \varrho_{mp} = m(qikpsr) : p(qikmsr) = m(pikqsr) : p(mikqsr).$$

Hierbei ist erstens die Anordnung der Zahlen innerhalb der Klam-

mern gleichgültig, sobald sie nur in beiden dieselbe ist und p und m gleiche Stellen einnehmen. Zweitens dürfen in den Klammern neben p bzw. m irgend fünf weitere Schnittpunkte der drei Flächen 2. Gr. gesetzt werden.

Ferner läßt sich folgende Umformung vornehmen:

$$\varepsilon \cdot m(qikpsr) \equiv$$

$$\left\{\frac{|mqik|\cdot|mqsr|}{|mqir|\cdot|mqsk|} - \frac{|mpsr|\cdot|mpik|}{|mpsk|\cdot|mpir|}\right\}\cdot|mqir|\cdot|mqsk|\cdot|mpsk|\cdot|mpir|,$$

$$= \left\{\frac{|lpsr|\cdot|lpik|}{|lpsk|\cdot|lpir|} - \frac{|lqik|\cdot|lqsr|}{|lqir|\cdot|lqsk|}\right\}\cdot|mqir|\cdot|mqsk|\cdot|mpsk|\cdot|mpir|,$$

$$= \varepsilon'\cdot l(psrqik)\cdot\frac{|mqir|\cdot|mpsk|\cdot|mqsk|\cdot|mpir|}{|lqir|\cdot|lpsk|\cdot|lqsk|\cdot|lpir|},$$

$$= \varepsilon'\cdot l(psrqik)\cdot\varrho_{ml}^2 = \varepsilon''\cdot l(qikpsr)\cdot\varrho_{ml}^2.$$

Da in dieser Relation die Anordnung der Zahlen innerhalb der Klammern der beiden Symbole $m(qikpsr)$ und $l(qikpsr)$ völlig gleich ist, ist auch die Anzahl der Inversionen innerhalb der Klammern die gleiche und folglich ohne Einfluß. Dagegen bilden m und l mit den Zahlen innerhalb der Klammer für $m < l$ noch $(m-1)$ bzw. $(l-2)$ Inversionen, oder für $m > l$ noch $(m-2)$ bzw. $(l-1)$ Inversionen. Hieraus folgt: $\varepsilon : \varepsilon'' = (-1)^{m+l-1}$, was die weitere Formel nach sich zieht:

(VIIIa) $\qquad \varrho_{ml}^2 = (-1)^{m+l-1}\cdot m(qikpsr) : l(qikpsr).$

Nach (VIII) ist aber:

$$m(qikpsr) = r(qikpsm)\cdot\varrho_{mr},$$
$$l(qikpsr) = r(qikpsl)\cdot\varrho_{lr},$$

so daß (VIIIa) übergeht in:

(VIIIb) $\qquad \varrho_{ml} = (-1)^{m+l}\cdot r(qikpsm) : r(qikpsl).$

Die Gleichungen (VIII), (VIIIa) und (VIIIb) stellen die Werte der ϱ dar; doch besteht ein wesentlicher Unterschied darin, daß die beiden letzteren sämtliche acht Schnittpunkte enthalten, die erstere jedoch nur sieben davon. Deshalb ist es die Gleichung (VIII), die unseren Zwecken dienen kann, nämlich die Koordinaten des achten Schnittpunktes durch die der übrigen darzustellen.

Setzen wir etwa in die Gleichung (VIII) für ϱ_{mp} seinen Wert gemäß (IIb) ein, so kommt:

(IX) $m(pikqrs)\cdot|pqrs|\cdot|pikl| - p(mikqrs)\cdot|mqrs|\cdot|mikl| = 0.$

Diese Gleichung enthält die Koordinaten des Punktes l linear, die der Punkte m und p vom vierten und die der Punkte i, k, q, r, s vom dritten Grade. Ersetzt man in der Gleichung (IX) den Punkt l durch einen variabeln Punkt o, so stellt dieselbe eine Ebene durch die Gerade ik dar, die den gesuchten Punkt l enthält, wenn die übrigen sieben Punkte gegeben sind. Zwei weitere Ebenen durch den gesuchten Punkt l und die Geraden iq bzw. qk erhält man, indem man in (IX) den Punkt k bzw. den Punkt i durch den Punkt q ersetzt.

Auch die Gleichung des achten Schnittpunktes läßt sich mit Hilfe der übrigen leicht darstellen. Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ, ω die Ebenenkoordinaten und setzen wir zur Abkürzung:

$$\mathsf{E}_i \equiv x_i\xi + y_i\eta + z_i\zeta + w_i\omega,$$

so besteht die Identität:

$$\mathsf{E}_p \cdot |qrsl| + \mathsf{E}_q \cdot |rslp| + \mathsf{E}_r \cdot |slpq| + \mathsf{E}_s \cdot |lpqr| \\ + \mathsf{E}_l \cdot |pqrs| \equiv 0,$$

da die Koeffizienten von ξ, η, ζ, ω einzeln identisch verschwinden. Multipliziert man die Gleichung mit $|iklm| : |pqrs|$, so geht sie über in:

$$\mathsf{E}_p \varrho_{lp} \cdot |ikmp| + \mathsf{E}_q \varrho_{lq} \cdot |ikmq| + \mathsf{E}_r \varrho_{lr} \cdot |ikmr| + \mathsf{E}_s \varrho_{ls} \cdot |ikms| \\ + \mathsf{E}_l \cdot |iklm| = 0,$$

oder:

$$\mathsf{E}_p \varrho_{ip} \cdot |ikmp| + \mathsf{E}_q \varrho_{iq} \cdot |ikmq| + \mathsf{E}_r \varrho_{ir} \cdot |ikmr| \\ + \mathsf{E}_s \varrho_{is} \cdot |ikms| + \mathsf{E}_l \varrho_{il} \cdot |ikml| = 0.$$

Hierin setze man nun noch: $\varrho_{ip} = \frac{i(pqrskm)}{p(iqrskm)}$, $\varrho_{iq} = \frac{i(pqrskm)}{q(pirskm)}$ usw., dann gewinnt man die Gleichung:

$$\frac{\mathsf{E}_p \cdot |ikmp|}{p(iqrskm)} + \frac{\mathsf{E}_q \cdot |ikmq|}{q(pirskm)} + \frac{\mathsf{E}_r \cdot |ikmr|}{r(pqiskm)} \\ + \frac{\mathsf{E}_s \cdot |ikms|}{s(pqrikm)} = -\varrho_{il} \frac{\mathsf{E}_l \cdot |ikml|}{i(pqrskm)}.$$

Die rechte Seite gleich Null gesetzt ist aber von einem konstanten Faktor abgesehen nichts anderes als die Gleichung $\mathsf{E}_l = 0$ des Punktes l. *Die Gleichung des achten Punktes drückt sich also mit Hilfe der übrigen Schnittpunkte folgendermaßen aus:* [1])

$$\text{(X)} \quad \frac{\mathsf{E}_p \cdot |ikmp|}{p(ikmqrs)} - \frac{\mathsf{E}_q \cdot |ikmq|}{q(ikmrsp)} + \frac{\mathsf{E}_r \cdot |ikmr|}{r(ikmspq)} - \frac{\mathsf{E}_s \cdot |ikms|}{s(ikmpqr)} = 0 \cdot$$

1) Die Gleichungen (VIIIb) und (X) finden sich schon ähnlich in meiner zu Anfang zitierten Arbeit; vgl. dort die Gleichungen (II) und (IV).

Die sieben gegebenen Punkte sind hierbei in zwei Gruppen geteilt, nämlich einerseits die drei Punkte i, k, m und andererseits die vier Punkte p, q, r, s. In der Gleichung (X) treten erstens die vier simultanen Invarianten auf, welche die Punkte der ersten Gruppe mit je einem Punkt der zweiten Gruppe bestimmen, zweitens die vier simultanen Kovarianten 4. Ord., die je drei Punkte der zweiten Gruppe mit denen der ersten verbinden. Diese Kovarianten sind in je sechs Punkten symmetrisch gebaut; an Stelle der laufenden Koordinaten aber stehen die Koordinaten des siebenten Punktes. Beseitigt man in (X) die Nenner, so wird die Gleichung in i, k, m symmetrisch und ebenso in p, q, r, s symmetrisch, und zwar in den Koordinaten dieser Punkte vom 8. Grade und in den Koordinaten jener Punkte vom 7. Grade.

Ich wende mich nun der Frage zu, den achten Schnittpunkt dreier Flächen 2. Grades zu bestimmen, falls von den übrigen Punkten sechs als Schnittpunkte einer Raumkurve 3. Ord. mit einer Fläche 2. Grades gegeben sind. Die Raumkurve 3. Ord. sei in der Form:

$$x:y:z:w = \lambda^3:\lambda^2:\lambda:1 \tag{XI}$$

gegeben. Dann wird die Fläche 2. Grades:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dw^2 + 2Exy + 2Fxz \\ + 2Gxw + 2Hyz + 2Jyw + 2Kzw = 0 \end{aligned} \tag{XII}$$

jene Raumkurve in sechs Punkten mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ schneiden, die der Gleichung 6. Grades genügen:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \equiv A\lambda^6 + 2E\lambda^5 + (B + 2F)\lambda^4 + (2G + 2H)\lambda^3 \\ + (C + 2J)\lambda^2 + 2K\lambda + D = 0. \end{aligned} \tag{XIII}$$

Umgekehrt werden alle Flächen von der Form (XII) durch die nämlichen sechs Punkte der Raumkurve 3. Ord. gehen, sobald sie in den Konstanten $A, E, K, D, B + 2F, G + H, C + 2J$ übereinstimmen.

Die Schmiegungsebene in einem Punkte k der Raumkurve 3. Ord. hat die Gleichung:

$$x - 3\varkappa y + 3\varkappa^2 z - \varkappa^3 w = 0. \tag{XIV}$$

Durch einen Raumpunkt x_7, y_7, z_7, w_7 gehen also drei Schmiegungsebenen mit den Parametern $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, für welche:

$$\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = x_7 : w_7,\ \tfrac{1}{3}(\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1) = y_7 : w_7,\ \tfrac{1}{3}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3) = z_7 : w_7$$

ist. Durch den Punkt 7 geht eine Doppelsekante der Raumkurve, die sie in den beiden Punkten mit den Parametern ϱ bzw. σ schneiden mag, so daß $\varrho^3:\varrho^2:\varrho:1$ bzw. $\sigma^3:\sigma^2:\sigma:1$ deren Koordinaten sind. Der Punkt 7 auf der Doppelsekante hat dann die Koordinaten:

$$\text{(XV)}\quad x_7:y_7:z_7:w_7=(\alpha\varrho^3-\beta\sigma^3):(\alpha\varrho^2-\beta\sigma^2):(\alpha\varrho-\beta\sigma):(\alpha-\beta).$$

Seine Parameter $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ genügen sonach der Gleichung:

$$\text{(XVI)}\qquad \alpha(\varkappa-\varrho)^3-\beta(\varkappa-\sigma)^3=0;$$

also ist:

$$\varkappa_1=(\varrho\sqrt[3]{\alpha}-\sigma\sqrt[3]{\beta}):(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}),\ \varkappa_2=(\varrho\sqrt[3]{\alpha}-\varepsilon\sigma\sqrt[3]{\beta}):(\sqrt[3]{\alpha}-\varepsilon\sqrt[3]{\beta}),$$
$$k_3=(\varrho\sqrt[3]{\alpha}-\varepsilon^2\sigma\sqrt[3]{\beta}):(\sqrt[3]{\alpha}-\varepsilon^2\sqrt[3]{\beta}),\ \varepsilon=\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Der gesuchte Punkt 8 möge die Parameter $\varkappa_1', \varkappa_2', \varkappa_3'$ besitzen. Er liegt auf der vorher erwähnten Doppelsekante: seine Koordinaten sind deshalb:

$$\text{(XVa)}\quad x_8:y_8:z_8:w_8=(\alpha'\varrho^3-\beta'\sigma^3):(\alpha'\varrho^2-\beta'\sigma^2):(\alpha'\varrho-\beta'\sigma):(\alpha'-\beta')$$

und seine Parameter genügen der Gleichung:

$$\text{(XVIa)}\qquad \alpha'(\varkappa-\varrho)^3-\beta'(\varkappa-\sigma)^3=0.$$

Soll eine Fläche 2. Grades (XII), die auf der Raumkurve 3. Ord. die sechs Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ ausschneidet, auch noch die Raumpunkte 7 und 8 enthalten, so müssen die Koordinaten (XV) und (XVa) die Gleichung (XII) befriedigen. Das liefert die Bedingung:

$$\alpha^2\{A\varrho^6+2E\varrho^5+(B+2F)\varrho^4+2(G+H)\varrho^3+(C+2J)\varrho^2+2K\varrho+D\}$$
$$+\beta^2\{A\sigma^6+2E\sigma^5+(B+2F)\sigma^4+2(G+H)\sigma^3+(C+2J)\sigma^2+2K\sigma+D\}$$
$$-2\alpha\beta\{A\varrho^3\sigma^3+B\varrho^2\sigma^2+C\varrho\sigma+D+E(\varrho^3\sigma^2+\sigma^3\varrho^2)+\cdots+K(\varrho+\sigma)\}=0$$

und eine weitere, in der α', β' an die Stelle von α, β treten. D. h. es sind $\alpha:\beta$ und $\alpha':\beta'$ die Wurzeln der vorstehenden Bedingungsgleichung. Demgemäß haben wir im Hinblick auf die Bezeichnung (XIII) die Relation:

$$\text{(XVII)}\qquad \alpha\alpha'\varphi(\varrho)=\beta\beta'\varphi(\sigma).$$

Nun sind von vornherein die Koordinaten des Punktes 7 gegeben und damit seine Parameter $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ als Wurzeln der Gleichung 3. Grades

$$\text{(XVI)}\quad f(\varkappa)\equiv w_7\varkappa^3-3z_7\varkappa^2+3y_7\varkappa-x_7=\alpha(\varkappa-\varrho)^3-\beta(\varkappa-\sigma)^3=0$$

bestimmt. Bezeichnen wir: $f(x) = 0$ symbolisch mit $a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3 = 0$, so ist die zugehörige Hessesche Form:

$$H(x) \equiv (ab)^2 a_x b_x;$$

ferner ist ihre Kovariante 3. Grades:

$$Q(x) \equiv (ab)^2 (ac) b_x c_x^2$$

und ihre Invariante:

$$\Delta \equiv (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd).$$

Zwischen ihnen besteht die Relation:

$$\text{(XVIII)} \quad Q^2 + \frac{\Delta}{2} f^2 \equiv -\frac{1}{2} H^3 \equiv \left(Q + f\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}\right)\left(Q - f\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}\right).$$

Ist aber $f(x) = 0$ die Parametergleichung des Punktes 7, so stellt $H(x) = 0$ die Parameter ϱ und σ der beiden Punkte der Raumkurve 3. Ord. dar, in denen sie von der Doppelsekante aus dem Punkte 7 getroffen wird. Es ist also bis auf einen Faktor $H(x)$ identisch mit $(x - \varrho)(x - \sigma)$. Daraus folgt weiter nach XVIII:

$$\text{(XIX)} \quad \begin{aligned} Q + f\sqrt{-\frac{\Delta}{2}} &\equiv \gamma (x - \varrho)^3, \\ Q - f\sqrt{-\frac{\Delta}{2}} &\equiv \delta (x - \sigma)^3, \\ f\sqrt{-2\Delta} &\equiv \gamma (x - \varrho)^3 - \delta (x - \sigma)^3, \end{aligned}$$

wo γ und δ bestimmte Konstanten sind. Andererseits ist aber nach (XVI):

$$f\sqrt{-2\Delta} \equiv \{\alpha (x - \varrho)^3 - \beta (x - \sigma)^3\}\sqrt{-2\Delta},$$

folglich:

$$\gamma = \alpha\sqrt{-2\Delta} \text{ und } \delta = \beta\sqrt{-2\Delta}.$$

Den Wert von $\varphi(\varrho)$ bzw. $\varphi(\sigma)$ erhalten wir als die sechste Überschiebung von $\varphi(x)$ über $(x - \varrho)^6$ bzw. über $(x - \sigma)^6$. Das ergibt die Beziehungen:

$$\text{(XX)} \quad \begin{aligned} \left(\varphi, \left(Q + f\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}\right)^2\right)^6 &\equiv \gamma^2 \varphi(\varrho) \\ \left(\varphi, \left(Q - f\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}\right)^2\right)^6 &\equiv \delta^2 \varphi(\sigma). \end{aligned}$$

Demnach läßt sich die Gleichung:

$$\text{(XXI)}\quad \begin{aligned} &\left(Q + f\sqrt{-\tfrac{\Delta}{2}}\right)\cdot\left(\varphi,\left(Q - f\sqrt{-\tfrac{\Delta}{2}}\right)^2\right)^6 \\ -&\left(Q - f\sqrt{-\tfrac{\Delta}{2}}\right)\cdot\left(\varphi,\left(Q + f\sqrt{-\tfrac{\Delta}{2}}\right)^2\right)^6 = 0 \end{aligned}$$

auch in der Form schreiben:

$$\gamma(\varkappa - \varrho)^3 \cdot \delta^2\varphi(\sigma) - \delta(\varkappa - \sigma)^3 \cdot \gamma^2\varphi(\varrho) = 0,$$

oder:

$$\alpha'(\varkappa - \varrho)^3 - \beta'(\varkappa - \sigma)^3 = 0,$$

wo: $\alpha' = \gamma\delta^2\varphi(\sigma)$ und: $\beta' = \gamma^2\delta\varphi(\varrho)$ ist.

Diese Größen α', β' und die Größen α, β aus der Gleichung (XVI) genügen aber der Relation: $\alpha\alpha'\varphi(\varrho) = \beta\beta'\varphi(\sigma)$, wie man ohne weiteres erkennt.

Hiermit haben wir nachgewiesen, daß die Gleichung (XXI) die drei Parameter des achten Schnittpunktes dreier Flächen 2. Grades liefert, wenn $f(\varkappa) = 0$ die Gleichung der drei Parameter des 7. Punktes ist und $\varphi(\varkappa) = 0$ die Parameter der sechs übrigen Schnittpunkte darstellt, die auf der Raumkurve 3. Ord. selbst gelegen sind. Führt man noch in (XXI) die Rechnung etwas weiter aus, so erhält man:

$$\text{(XXIa)}\quad 4\,Q \cdot (\varphi, fQ)^6 - 2\,f(\varphi, Q^2)^6 + \Delta f(\varphi, f^2)^6 = 0.$$

Druckfertig erklärt 28. XI. 1908.]

SITZUNG VOM 7. DEZEMBER 1908.

1. Herr Held übergibt für die Abhandlungen den zweiten Teil seiner Untersuchung über den feineren Bau des Ohrlabyrinthes (Jubiläumsband).

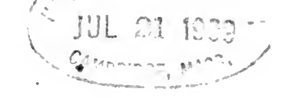
   Herr Bruns trägt vor über die Theorie der astronomischen Strahlenbrechung (Jubiläumsband).

   Herr Rohn übergibt für die Berichte einen Aufsatz von Prof. Liebmann: Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelenpostulat, verbunden mit neuer Begründung der hyperbolischen Geometrie, und von J. Thomae über: Parameterdarstellung der Raumkurven vierter Ordnung.

   Herr Hölder berichtet über eine für die Berichte bestimmte Arbeit von Prof. Bernstein: Zur Theorie der trigonometrischen Reihe.
2. Geschäftliche Mitteilungen.

GEMEINSAME SITZUNG BEIDER KLASSEN VOM 19. DEZEMBER 1908.

Nachdem die math.-phys. Klasse in ihrer Sitzung vom 7. Dezember beschlossen hatte, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Hempel in Dresden zu präsentieren, wird der Genannte zum ordentlichen Mitglied gewählt



Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelenpostulat, verbunden mit neuer Begründung der hyperbolischen Geometrie.

Von

HEINRICH LIEBMANN.

Nachdem die Aufstellung der Formeln der hyperbolischen Trigonometrie ohne Aufwand anderer Hilfsmittel als der elementarsten Eigenschaften ebener Figuren durchgeführt worden ist,[1]) lag es nahe, dieselbe Aufgabe für die sphärisch-elliptische Geometrie in Angriff zu nehmen.

Was die *Kugel* betrifft, so hat bekanntlich schon LOBATSCHEFSKIJ nachgewiesen, daß auch noch im hyperbolischen Raum *die gewöhnliche sphärische Trigonometrie* bestehen bleibt, indem er die Formeln für diesen Fall von neuem entwickelte.[2]) Hier aber handelt es sich darum, die allgemeinere Tatsache, daß diese *Formeln vom Parallelenpostulat unabhängig sind*, möglichst einfach und unmittelbar zu beweisen. Mit anderen Worten, es sollen nur Sätze benützt werden und Konstruktionen, welche auf der Kugelfläche selbst abgeleitet sind, welche also nur darauf beruhen, daß sphärische Figuren auf der Kugelfläche beweglich sind ohne Formänderung.

Von demselben Gesichtspunkt aus wird hier nochmals die Trigonometrie der hyperbolischen Ebene in Angriff genommen; sie baut sich dann *fast genau ebenso* auf, wie die sphärische Trigonometrie.

Die folgenden Betrachtungen geben also:

1) *Einen Beweis für die Unabhängigkeit der sphärischen Trigonometrie vom Parallelenpostulat.*

2) *Einen neuen Aufbau der hyperbolischen Trigonometrie.*

---

1) Diese Berichte 1907, S. 187 ff.

2) N. J. LOBATSCHEFSKIJ, Zwei geometrische Abhandlungen. Übersetzt von F. ENGEL, Leipzig 1899, S. 235.

Die erste Aufgabe gehört dem elementaren Gebiet an; sie erfordert keine schwierigeren Betrachtungen als die übliche Ableitung, und sie leistet mit weniger Voraussetzungen dasselbe. (Zugleich wird natürlich hiermit die Trigonometrie der elliptischen Ebene bewiesen.)

Im Anschluß daran werden immer die entsprechenden Sätze der hyperbolischen Geometrie aufgestellt, in vielen Fällen genügt eine Andeutung des Beweises, ja es ist nicht einmal eine Wiederholung des Satzes nötig.

Durch die Überschriften „*Sphärik*" und „*Hyperbolische Geometrie*", die sich im folgenden bei jedem Abschnitt wiederholen, werden aber der Übersicht halber beide Gedankengänge deutlich getrennt, *so daß der erste für sich allein verfolgt werden kann.*

§ 1. Grundlagen.

Sphärik.

1. *Der* (sphärische) *Inhalt eines* (von Großkreisbogen begrenzten) *n-Ecks ist dem sphärischen Exzeß gleich* (d. h. dem Überschusse der Winkelsumme über $(n-2)\pi$).

An und für sich ist der Exzeß noch mit einer Funktion des Kugelradius R zu multiplizieren, die im euklidischen Raume gleich R^2 ist, doch spielt diese Funktion hier keine Rolle.

2. *Die Bogenlänge s eines Kreisstückes und der Sektor S sind beide dem Zentriwinkel* (φ) *zwischen den sphärischen Radien* (r) *proportional.*

Den Radius denken wir uns hierbei „sphärisch gemessen", d. h. durch den Winkel, welche die Kugelradien einschließen, die nach den Endpunkten des Radius gezogen sind.

Wir setzen auf Grund dieses Satzes:

$$s = \varphi \cdot \bigcirc(r),$$
$$S = \varphi \cdot \bullet(r),$$

wo $\bigcirc(r)$ und $\bullet(r)$ *stetige Funktionen* von r sind und wir werden später die bekannten Resultate:

$$\bigcirc(r) = \sin r,$$
$$\bullet(r) = 1 - \cos r$$

erhalten.

Jeder Kreis vom sphärischen Radius r auf der Kugel kann zugleich auch als „*Abstandslinie*" aufgefaßt werden, d. h. als Ort der Endpunkte (sphärischer) Lote gleicher Länge

$$l = \frac{\pi}{2} - r,$$

die auf dem Großkreis errichtet sind, dessen Achse mit der des Kleinkreises zusammenfällt. Zwei Lote l, welche über dem Stück x des Großkreises errichtet sind, den wir als „*Grundlinie*" bezeichnen wollen, begrenzen ein Stück u der Abstandslinie, welches zu x proportional ist:

$$u = x \cdot E(l),$$

wobei

$$E(l) = \dot{\circ}\left(\frac{\pi}{2} - l\right)$$

und sie begrenzen mit x und u zusammen ein Stück U der Kugeloberfläche, welches auch zu x proportional ist:

$$U = x \cdot J(l),$$

wo

$$J(l) = 1 - \dot{\bullet}\left(\frac{\pi}{2} - l\right).$$

In der Tat sind diese Ausführungen nur eine andere Fassung dessen, was zuvor über den Kleinkreis gesagt ist.

(Für die elliptische Ebene gilt genau dasselbe, sobald man eine geeignete Maßbestimmung einführt.)

3. *Beschreibt man einem gegebenen Kreisbogen n gleiche Sehnen ein* (Großkreisbogenstücke) *und läßt die Anzahl n unbegrenzt zunehmen, wobei zugleich ihrer Größe unbegrenzt abnimmt, so ist der Grenzwert der Sehnensumme gleich der Länge des Kreisbogens.*

Ein ähnliches Prinzip ist noch für den Flächeninhalt anzuwenden, übrigens nur bei solchen Figuren, die von Großkreisbogen und Kreisbogen begrenzt sind:

4. *Bildet der Rand von n* (sich aneinanderschließenden und sich nicht überdeckenden) *Figuren einen Linienzug, der bei unbegrenzt wachsendem n mit dem Rand einer gegebenen Figur zusammenfällt* (während zugleich das Innere der Teilfiguren mit dem Inneren der Figur zusammenfällt), *so ist der Inhalt der Figur gleich dem Grenzwert der Inhaltsumme der Teilfiguren.*

Hyperbolische Geometrie.

An Stelle von „*Großkreisbogen*" ist immer zu setzen: „*geradlinige Strecke*"; davon abgesehen bleiben die Prinzipien 3 und 4 ungeändert. In 2) ist der „geradlinige" Radius zu nehmen; 1) ändert

sich dahin, daß an Stelle des „*Exzesses*" der „*Defekt*", d. h. der Überschuß von $2n - 4$ Rechten über die Winkelsumme zu nehmen ist.[1])

Die vier Funktionen ○, ●, E und J stehen nicht mehr in so einfachem geometrischen Zusammenhang, darüber wird im folgenden Paragraphen Auskunft gegeben; doch sei hier schon bemerkt, daß sich ergeben wird

$$\bigcirc(r) = \operatorname{sh} r \left(= \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right),$$

$$\bullet(r) = \operatorname{ch} r - 1 .$$

Die *Abstandslinie* kann nicht zugleich als Kreis mit reellem Mittelpunkt betrachtet werden, sie ist nur definiert als der Ort der Endpunkte von Loten gleicher Länge, welche auf einer Geraden errichtet sind.

Das dritte Prinzip gilt natürlich auch für Abstandslinien. —

Beziehung zwischen Parallelwinkel (α) *und Lot* (a) *in der hyperbolischen Geometrie.* Um von vornherein die Möglichkeit einiger konstruktiver Grenzübergänge zu beweisen, welche in § 2 gebraucht werden, müssen wir noch zeigen, daß der Grenzwert[2])

$$\operatorname*{limes}_{a=0} \frac{a}{\frac{\pi}{2} - \alpha} = \operatorname*{limes}_{\gamma=0} \frac{c'}{\gamma}$$

existiert und von 0 und ∞ verschieden ist:

---

1) Dieser Satz rührt von GAUSS her. (Vgl. z. B. die Darstellung in meiner „Nichteuklidischen Geometrie" (Leipzig, 1905), S. 69ff. — Er gilt auch noch dann, wenn eine Ecke unendlich fern ist (vgl. diese Berichte 1906, S. 560ff), woraus z. B. folgt, daß die Grenzkreissektoren endlichen Inhalt haben.

2) Die Definition des „Parallelwinkels"

$$\alpha = \Pi(a),$$

der „zum Lote a gehört", findet man z. B. bei LOBATSCHEFSKIJ a. a. O. S. 11 und S. 167. Ist ferner

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \tfrac{1}{2}\pi,$$

das heißt

$$\Pi(a') = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha,$$

so nennen wir a und a' „komplementäre" Lote oder Strecken. Die zu einer Strecke a, b, $c \cdots$ komplementäre soll im folgenden überhaupt immer mit a', b', $c' \cdots$ bezeichnet werden.

Der Inhalt eines asymptotischen rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel α (die beiden anderen sind Null und $\frac{1}{2}\pi$) ist

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha.$$

Wir denken uns jetzt vom Scheitel A des (spitzen) Winkels α aus die Strecke $a : 2n$ abgetragen, im Endpunkt das Lot errichtet und durch A die Parallele dazu gezogen, sie schließt mit der Strecke den Winkel α_{2n} ein, und der Definition nach ist

$$\alpha_{2n} = \Pi\left(\frac{a}{2n}\right).$$

Dieses asymptotische rechtwinklige Dreieck klappen wir jetzt um die (unendliche) Kathete um, dann um die Hypotenuse usw., $2n - 1$ mal.

Die dann entstehende Figur ist aus n asymptotischen gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt, mit den Grundlinien $a : n$, deren Summe also gleich a ist, der Inhalt ist

$$2n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2n}\right).$$

Die Ecken liegen auf einem Grenzkreis,[1] und wenn wir mit n zur Grenze Unendlich übergehen, so verwandelt sich die Sehnensumme in einen Grenzkreisbogen, die Inhaltsumme in den zugehörigen Grenzkreissektor; der Quotient

$$\frac{a}{2n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2n}\right)}$$

wird also in das beim Grenzkreis konstante und von der Bogenlänge unabhängige,[2] (von Null und Unendlich verschiedene) *Verhältnis von Bogen und Sektor übergehen.*

Hiermit ist bewiesen, daß das Verhältnis von Strecke (Lot) und Komplementärwinkel zum Parallelwinkel einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert hat:

$$C = \lim_{a=0} \frac{a}{\frac{\pi}{2} - \alpha}.$$

---

1) Vgl. die im Sachregister (Lobatschefskij S. 459) angeführten Stellen, besonders S. 186 ff.).

2) Daß der Grenzkreissektor endlichen Inhalt hat, folgt aus S. 292, Anm. 1; daß das Verhältnis von Bogen und Sektor konstant ist, aus der Beweglichkeit des Grenzkreises in sich.

§ 2. Funktionalgleichungen zwischen den vier Funktionen. Bestimmung dieser Funktionen.

Sphärik.

Durch Zerschneiden und wieder Zusammensetzen von einer bestimmten Figur gelangen wir jetzt zu Funktionalgleichungen, welche $E(a)$ und daher auch $\bigcirc(a)$ bestimmen. Es sei (Fig. 1) s ein Kreisbogen, den wir aber hier als Abstandslinie (Seite 290) auffassen, und zu dem wir noch die äquidistanten Bogen u und v konstruieren, im Abstand a.

Die Summe $u + v$ kann dann so bestimmt werden: Wir zerlegen s in n gleiche Teile, ziehen die Sehnen von s und die n Lote auf s (oder Kreisradien) in den Teilpunkten. u und v werden dabei in je n gleiche Teile zerlegt, und es entstehen dabei n Paare von Teilfiguren ($1 + 2$, $1' + 2'$, $\cdots$). Diese legen wir jetzt „Kopf gegen Fuß" aneinander (Fig. 2). Dabei wird aus dem gebrochenen Sehnenzug von Fig. 1 ein einziges Großkreisstück, dessen Länge der Sehnensumme gleich ist.

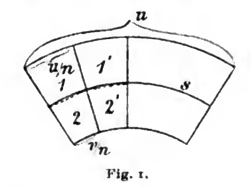


Fig. 1.

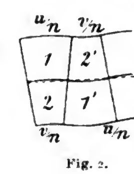


Fig. 2.

Die Summe $u + v$ kehrt in Fig. 2 wieder; ist im besonderen n eine gerade Zahl, so hat in Fig. 2 sowohl der obere wie der untere Rand die Länge

$$\tfrac{1}{2}(u + v).$$

Gehen wir jetzt zur Grenze ($n = \infty$) über, so erhält die Mittellinie in Fig. 2 die Länge s, und die gebrochenen, aus Stücken der Länge $u : n$, $v : n$ zusammengesetzten Ränder werden Abstandslinien. Hieraus folgt

$$u + v = 2s \cdot E(a).$$

Ist s seinerseits ein Abstandslinienstück, das im Abstand b über dem Großkreisbogen x steht, so kommt

$$u + v = 2xE(a)\,E(b).$$

Andrerseits ist in diesem Fall

$$u = x \cdot E(a + b)$$
$$v = x \cdot E(a - b),$$

was daraus folgt, daß, wenn b auf a von s aus abgetragen wird nach einer bestimmten Seite hin, etwa nach unten, der Ort der Endpunkte ein Großkreisbogen der Länge x sein soll.

Hieraus folgt also:

$$(1) \qquad E(a+b) + E(a-b) = 2\,E(a)\,E(b)\,.$$

Stellt man dieselbe Betrachtung für den Inhalt auf, so kommt

$$(2) \qquad J(a+b) + J(a-b) = 2\,E(b)\,J(a)\,.$$

Ist dagegen s ein Kreisbogen mit dem (sphärischen) Radius $b > a$, so gelangen wir zu den Gleichungen:

$$(3) \qquad \bigcirc(a+b) + \bigcirc(b-a) = 2\bigcirc(b)\,E(a)\,,$$

und

$$(4) \qquad \bullet(a+b) - \bullet(b-a) = 2\bigcirc(b)\,J(a)\,.$$

(3) und (4) liefern nichts neues, weil hier, in der *Sphärik,* ein Kreisbogen ja genau dasselbe ist, wie eine Abstandslinie.

(1) kann sofort gelöst werden, da

$$E(0) = 1\,, \quad E(a) \leq 1\,, \quad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ist,}$$

so ergibt sich nach Cauchy[1])

$$(5) \qquad E(a) = \cos a\,.$$

Die zweite und die dritte Funktionalgleichung sind zu lösen unter den Voraussetzungen

$$0 = J(0) < J(a) < J\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$0 = \bigcirc(0) < \bigcirc(a) < \bigcirc\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

und ergeben sofort[2])

$$(6) \qquad J(a) = \sin a\,,$$

$$(7) \qquad \bigcirc(a) = \sin a\,.$$

Die vierte liefert

$$\bullet(a) = K - \cos a$$

und wegen

$$\bullet(0) = 1$$

$$(8) \qquad \bullet(a) = 1 - \cos a\,.$$

Die Werte (7) und (8) hätten auch unmittelbar aus den einfachen Beziehungen abgeleitet werden können, die auf der Kugel

---

1) Vgl. Cauchy, Analyse algebrique, Paris 1821, S. 114. Die einzige Voraussetzung bei der Auflösung dieser Funktionalgleichung ist, daß E eine stetige Funktion sein soll.

2) Auch hier ist bei der Auflösung angenommen, daß die Funktionen stetig sein sollen.

zwischen E und $\bigcirc$ einerseits, zwischen J und $\bullet$ andrerseits bestehen. Wir haben aber davon keinen Gebrauch gemacht, weil dann das Schlußverfahren, wie wir weiter unten sehen werden, ohne weiteres auf die hyperbolische Geometrie übertragbar ist.

Hyperbolische Geometrie.

In der hyperbolischen Geometrie ergeben sich genau dieselben Funktionalgleichungen 1—4; sie beruhen nur auf Kongruenzsätzen und auf den Prinzipien 3 und 4 des § 1, Prinzipien, die auch auf die hier vom Kreis wesentlich verschiedene Abstandslinie ohne weiteres übertragbar sind.

(Dieselben Funktionalgleichungen würden ja auch in der euklidischen Geometrie gelten.)[1])

Die Lösungen lauten aber hier anders.

Wegen

$$1 = E(0) < E(a)$$

wird[2])

$$E(a) = \tfrac{1}{2}(e^{ka} + e^{-ka}) = \operatorname{ch} ka\,,$$

oder, *bei geeigneter Wahl der Längeneinheit,*

$$E(a) = \operatorname{ch} a\,. \tag{5'}$$

Die Funktionalgleichungen (2) und (3) ergeben sodann:

$$J(a) = C_1 \operatorname{sh} a\,, \tag{6'}$$

$$\bigcirc(a) = C_2 \operatorname{sh} a\,; \tag{7'}$$

und aus (4) folgt

$$\bullet(a) = C_1 C_2 (\operatorname{ch} a - K)\,,$$

oder, wegen

$$\bullet(0) = 0$$

$$\bullet(a) = C_1 C_2 (\operatorname{ch} a - 1)\,. \tag{8'}$$

Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2. Die genaue Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 ist an dieser Stelle noch nicht möglich, sie ist aber, wie sich späterhin zeigen wird, für die Aufstellung der trigonometrischen Formeln auch *nicht nötig.* Wohl aber kann und muß gezeigt werden, wie sie mit der früher erwähnten Konstanten

$$C = \lim_{a=0} \frac{a}{\frac{\pi}{2} - \alpha}$$

---

1) Vgl. § 5. 2) Cauchy, a. a. O. S. 121.

zusammenhängen, welche dem Verhältnis von Grenzkreisbogen und zugehörigem Grenzkreissektor gleich ist.

Halten wir die Endpunkte eines Kreisbogens fest und lassen den Radius (r) unbegrenzt zunehmen, den Zentriwinkel φ also unbegrenzt abnehmen, so nähert sich das Verhältnis von Bogen und Sektor

$$\frac{\varphi \cdot \bigcirc(r)}{\varphi \cdot \circledcirc(r)},$$

da der Kreis in einen Grenzkreis übergeht, dabei dem Wert C also folgt

$$C = \lim_{r=\infty} \frac{C_2 \cdot \operatorname{sh} r}{C_1 C_2 (\operatorname{ch} r - 1)} = \frac{1}{C_1};$$

oder

$$C_1 = \frac{1}{C}.$$

C_2 bestimmt sich auf einem andern, nicht so einfachen Weg, nämlich durch Feststellung des Grenzwerts von $E(a) : \bigcirc(a)$ für $a = \infty$.

Wir benutzen dabei die Zuordnung des rechtwinkligen Dreiecks und des dreirechtwinkligen Vierecks,[1]) doch sei ausdrücklich hervorgehoben, daß dies an dieser Stelle noch nicht unbedingt erforderlich ist; nur würde ohne diese Hilfsmittel eine strenge Durchführung viel mehr Raum beanspruchen.

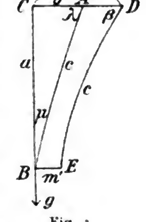


Fig. 3.

Den Ausgangspunkt bildet die folgende Figur (Fig. 3), welche bekanntlich die Parallelenkonstruktion ergibt.

Weitere Erläuterungen sind dazu nicht nötig, es genügt die Beschreibung: ABC ist das gegebene rechtwinklige Dreieck, $CDEB$ das zugehörige dreirechtwinklige Viereck, das bei D den spitzen Winkel

$$\beta = \Pi(b)$$

hat. Zwei Seiten, nämlich $DE = c$ und $CB = a$ stimmen mit zwei Seiten des gegebenen Dreiecks überein, und es ist $CD = l$, wo

$$\Pi(l) = \lambda,$$

endlich

$$\Pi(m') = \frac{\pi}{2} - \mu,$$

so daß ED und BA parallel sind.

---

1) Math. Annalen, Band 61, S. 185 ff. Vgl. unten S. 303, Z. 10—13.

Um B als Mittelpunkt wird jetzt der Kreis mit dem Radius c konstruiert; der Kreisbogen von A bis zur Verlängerung von BC (in der Figur nicht eingezeichnet) hat dann die Länge

$$\mu \bigcirc (c).$$

Ebenso denken wir uns über $BE = m'$ als Grundlinie die (durch D gehende) Abstandslinie im Abstand c konstruiert und bis zum Schnitt mit der Verlängerung von BC gezogen; die Länge ist

$$m' \cdot E(c).$$

Jetzt halten wir C und D fest, lassen aber B weiter und weiter hinausrücken und konstruieren in jeder Lage den zugehörigen Punkt E, indem wir in B auf g das Lot errichten und hierauf von D das Lot fällen; auch konstruieren wir für jede Lage von B den Punkt A.

Was wird die Grenze sein? Wenn $a = CB$ über alle Grenzen wächst, dann wird, wegen $\mu = 0$ auch

$$m' = 0,$$

daher

$$DE \parallel CB, \text{ also geht}$$

$$\sphericalangle CDE = \beta$$

über in

$$\Pi(l) = \lambda,$$

es wird also

$$\beta = \lambda, \quad b = l$$

und es rückt A an die Stelle D. (Man kann diesen Übergang, der hier *quantitativ* gegeben ist, dies sei nochmals hervorgehoben, auch ohne die Zuordnung ausführen, doch wären dann umständlichere Beweise mit Hülfe von *Ungleichheiten* notwendig.)

Also verwandelt sich sowohl AB wie DE in die (in der Figur nach unten gerichtete) Parallele zu g durch D. Kreisbogen sowohl wie Bogen der Abstandslinie gehen über in den Grenzkreisbogen durch D, der auf der andern Seite von g begrenzt wird und g als Achse hat.

Also wird

$$\text{limes} \frac{m'}{\mu} \frac{E(c)}{\bigcirc(c)} = 1$$

oder

$$\lim_{c=\infty} \frac{\bigcirc(c)}{E(c)} = \lim_{\mu=0} \frac{m'}{\mu}.$$

Es ist daher

$$\lim_{c=\infty} \frac{\bigcirc(c)}{E(c)} = C_2 \lim_{c=\infty} \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} c} = C_2$$

auf der andern Seite, der Definition nach (vgl. oben S. 293)

$$\lim_{n'=0} \frac{m'}{\mu} = C,$$

also

$$C_2 = C.$$

Hiernach nehmen die Formeln (6′) bis (8′) die genauere Gestalt an:

(6″) $$J(a) = \frac{\operatorname{sh} a}{C},$$

(7″) $$\bigcirc(a) = C \operatorname{sh} a,$$

(8″) $$\bullet(a) = \operatorname{ch} a - 1.$$

§ 3. Der Kosinussatz im rechtwinkligen Dreieck.

Sphärik.

Lassen wir auf der Kugel ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck ABC (Winkel α, β, $\frac{1}{2}\pi$; Katheten a (gegenüber A), b (gegenüber B), Hypotenuse c) um die Ecke B rotieren, so daß

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABE = \varphi \text{ ist,}$$

so beschreibt dabei die Hypotenuse den Sektor

$$S = \varphi \cdot \bullet(c).$$

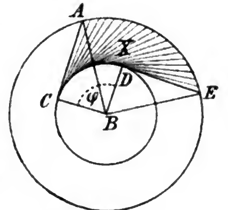


Fig. 4.

Nimmt man (vgl. Fig. 4) von dem Sektor das Dreieck BDE (das gedrehte Dreieck) fort, und fügt BCA hinzu, so ergibt sich

$$\varphi \cdot \bullet(c) = \varphi \cdot \bullet(a) + X,$$

wo X der schraffierte Flächeninhalt ist.

Um X zu bestimmen, denken wir uns den Kreisbogen CD in n gleiche Teile $CC_1, C_1C_2 \cdots C_{n-1}D$ zerlegt, ferner in $C_1C_2 \cdots C_{n-1}$ noch die den inneren Kreis tangierenden Großkreise gezogen und mit dem äußeren Kreis zum Schnitt gebracht $(A_1, A_2 \cdots A_{n-1})$. Die Schnittpunkte aufeinanderfolgender Tangenten CA und C_1A_1, C_1A_1 und C_2A_2 usw. bezeichnen wir mit $T_1, T_2 \cdots T_n$, die Winkel mit $\Delta\tau$, also

$$\sphericalangle AT_1A_1 = \sphericalangle A_1T_2A_2 = \cdots = \sphericalangle A_{n-1}T_nE = \Delta\tau.$$

Dann ist der Inhalt jeder der Teilfiguren $A T_1 A_1$ usw. angenähert

$$\varDelta\tau \cdot \bullet(b).$$

Die folgende Formel, in der wir durch das geschwungene Gleichheitszeichen $\approx$ andeuten, daß sie für endliches n nur angenähert gilt

$$X \approx n \cdot \varDelta\tau \cdot \bullet(b)$$

wird dann exakt.

Auf der andern Seite hat jedes der Vierecke

$$B C T_1 C_1 = B C_1 T_2 C_2 = \cdots = B C_{n-1} T_{n-1} D$$

den Inhalt

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (\pi - \varDelta\tau) - 2\pi = \frac{\varphi}{n} - \varDelta\tau$$

und der Inhalt des Sektors CBD ist angenähert, im Grenzfall $(n = \infty)$ gleich der Inhaltsumme der Vierecke, also

$$\varphi \cdot \bullet(a) \approx \varphi - n \cdot \varDelta\tau.$$

Für $n = \infty$ folgt

$$X = \varphi \cdot \{\bullet(b) - \bullet(a)\bullet(b)\},$$

und daher, wegen

$$\varphi \cdot \bullet(c) = \varphi \cdot \bullet(a) + X,$$

$$(1) \qquad \bullet(c) = \bullet(a) + \bullet(b) - \bullet(a) \cdot \bullet(b)$$

und nach 7 in § 2

$$(2) \qquad \cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

(Aus dem sphärischen Raum hätte diese Formel viel einfacher abgeleitet werden können. Wenn man in diesem Raum das rechtwinklige Dreieck so bewegt, daß B eine Gerade beschreibt, a aber immer senkrecht zur Bahn von B und in derselben Ebene bleibt, desgleichen die Ebene des Dreiecks immer zur Bahn von B senkrecht ist, so wird, wenn B den Weg s zurückgelegt hat, der Weg von C sein

$$s_c = s \cdot E(a),$$

und der Weg von A

$$s_a = s \cdot E(c).$$

s_a läßt sich noch anders berechnen; da CA auf der Bahnebene von C immer senkrecht steht, ist

$$s_a = s_c \cdot E(b) = s E(a) E(b),$$

daher wird

$$E(c) = E(a)\,E(b),$$

woraus wieder die Formel (2) folgt. Doch setzt diese Ableitung den sphärischen Raum voraus, während dagegen (1) ohne diese Annahme gefunden ist und für die Kugel schlechtweg gilt.)

Hyperbolische Geometrie.

Es ist genau so zu verfahren, wie in der Sphärik, nur treten an Stelle der Großkreisbogen gerade Linien und muß berücksichtigt werden, daß der Inhalt dem Defekt gleich ist, nicht dem Exzeß, daher wird

$$BCT_1C_1 = 2\pi - \frac{\varphi}{n} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (\pi - \Delta\tau) = \Delta\tau - \frac{\varphi}{n},$$

daher

$$X = \varphi \cdot \{\bullet(b) + \bullet(a)\bullet(b)\}$$

also

$$(1') \qquad \bullet(c) = \bullet(a) + \bullet(b) + \bullet(a)\bullet(b)$$

und nach § 2 (8″)

$$(2') \qquad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b\,.$$

(Durch dieselbe kinematische Betrachtung wie oben, natürlich im hyperbolischen Raum, käme man auf

$$E(c) = E(a)\,E(b),$$

was auch auf (2′) führt.)

§ 4. Die Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks.

Sphärik.

Der Kosinussatz reicht aus, um die ganze Trigonometrie des sphärischen rechtwinkligen Dreiecks und damit auch die sphärische Trigonometrie überhaupt abzuleiten.

Um diese Tragweite des Kosinussatzes zu zeigen, müssen wir uns einer Zuordnung rechtwinkliger Dreiecke bedienen, die von Hessenberg[1]) (wie Herr Hessenberg mir mitteilte, nach einem älteren Vorbild) bei der Darstellung der Napierschen Regel benützt worden ist.

Der Satz kann kurz so ausgesprochen werden, wenn wir die Abkürzung brauchen, allgemein

---

1) G. Hessenberg, Ebene und sphärische Trigonometrie (Sammlung Göschen). Leipzig 1904, S. 113—115.

$$\frac{\pi}{2} - a = a'$$

zu setzen:

Es seien a, b, c die Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, α, β, $\frac{\pi}{2}$ die ihnen gegenüberliegenden Winkel, dann existiert ein gewisses sphärisches Fünfeck mit den Seiten

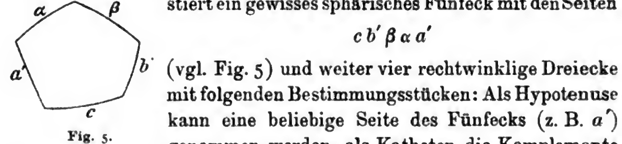


Fig. 5.

$$c\, b'\, \beta\, \alpha\, a'$$

(vgl. Fig. 5) und weiter vier rechtwinklige Dreiecke mit folgenden Bestimmungsstücken: Als Hypotenuse kann eine beliebige Seite des Fünfecks (z. B. a') genommen werden, als Katheten die Komplemente der anliegenden Seiten (z. B. α' und c'), die gegenüberliegenden Winkel sind dann die anliegenden Fünfeckseiten (β gegenüber α', b' gegenüber c' im neuen Dreieck).

Aus

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \tag{1}$$

folgt dann z. B.

$$\cos a' = \sin \alpha \cdot \sin c \; (= \cos \alpha' \cdot \cos c')$$

oder

$$\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c\,. \tag{2}$$

Diese beiden Formeln reichen, wie man sich leicht überzeugt, vollständig aus, um alle übrigen für das rechtwinklige Dreieck abzuleiten, und aus ihnen folgen in bekannter Weise die für das schiefwinklige Dreieck.

Hiermit ist also die Ableitung der sphärischen Trigonometrie erledigt.

Hyperbolische Geometrie.

Nicht ganz so einfach werden die Entwicklungen in der hyperbolischen Geometrie, doch beruhen sie auf einem durchaus entsprechenden Grundgedanken.

Es gilt der Satz:

Sind a, b, c die Seiten eines gegebenen rechtwinkligen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda = \Pi(l)$ gegenüber a, $\mu = \Pi(m)$ gegenüber b, $\frac{\pi}{2}$ gegenüber c, so können aus diesen fünf Elementen vier weitere rechtwinklige Dreiecke gebildet werden, und zwar in folgender Weise: Man bilde den Zyklus (Fig. 6) aus c, l, a', b', m.

Ein beliebiges Element (z. B. m) kann als Hypotenuse genommen werden, die Komplementärstrecken (z. B. a und l') der gegenüberliegenden Elemente als Katheten, und die im Zyklus anliegenden Elemente (b' und c) sind dann die Lote, deren zugehörige Parallelwinkel $\left(\frac{\pi}{2} - \beta \text{ und } \gamma\right)$ diesen Katheten im neuen Dreieck gegenüberliegen.[1])

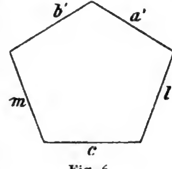


Fig. 6.

Die Existenz dieses *Zyklus* ergibt sich aus dem folgenden, für uns gleichfalls wichtigen Satz:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck $a, b, c; \lambda, \mu$ existiert ein zugeordnetes dreirechtwinkliges Viereck mit den Seiten c, m', a und l. Der einzige von einem Rechten verschiedene Winkel in diesem Viereck ist gleich β und liegt zwischen c und l.[2])

Zur *Ableitung der hyperbolischen Trigonometrie* reicht hier die Formel

$$\text{ch}\, c = \text{ch}\, a \,\text{ch}\, b \tag{1'}$$

und die aus ihr folgenden nicht aus, weil wir ja die Beziehung zwischen den hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken noch nicht kennen.

Man muß vielmehr eine ähnliche Überlegung wie in § 3 nochmals anstellen, indem man nämlich das dreirechtwinklige Viereck etwa so verschiebt, daß a eine Gerade beschreibt, die Verlängerung von a, und zwar soll die Verschiebungsstrecke s sein. (In Fig. 3 ist also das ganze Viereck längs der Geraden g um die Strecke s zu verschieben.)

Der Scheitel D des spitzen Winkels β beschreibt dabei eine Abstandslinie, und das von ihm auf a gefällte Lot l die Fläche

$$s \cdot J(l).$$

Diese Fläche ist aber auch gleich der von m' beschriebenen, vermehrt um die von c beschriebene (Y); also

$$s \cdot J(l) = s \cdot J(m') + Y.$$

Y wird genau so berechnet wie oben X, und zwar folgt

$$Y = s \cdot J(m') \cdot \mathfrak{S}(c),$$

also

$$J(l) = J(m')\,[1 + \mathfrak{S}(c)],$$

---

1) Math. Annalen, Band 61, S. 191.

2) Math. Annalen, Band 61, S. 189. (Vgl. oben, S. 297, Fig. 3).

oder, nach § 2, (8″) und (6″):

$$\operatorname{sh} l = \operatorname{sh} m' \cdot \operatorname{ch} c,$$

woraus wegen des Zyklus vier weitere Formeln folgen.

Der Zyklus ergibt z. B. die Formel

$$\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} l, \tag{3}$$

und aus (1) und (3) nebst

$$\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} b \operatorname{ch} m$$

folgt leicht

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} l \operatorname{sh} m. \tag{4}$$

Die Formeln (1′), (3) und (4) genügen durchaus; z. B. ergibt sich aus ihnen auch die Beziehung zwischen den hyperbolischen Funktionen komplementärer Strecken. Lassen wir im rechtwinkligen Dreieck c gleich Null werden, so wird bekanntlich[1])

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

also

$$m = l',$$

und die letzte Formel gibt dann

$$\operatorname{ch} 0 = 1 = \operatorname{sh} l \cdot \operatorname{sh} l',$$

oder

$$\operatorname{sh} l' = \frac{1}{\operatorname{sh} l}, \tag{5}$$

wodurch der Zusammenhang zwischen l und l' gefunden ist.[2])

§ 5. Übertragung auf die euklidische Geometrie.

Zum Schluß wollen wir noch die ganze Betrachtung auf die euklidische Geometrie übertragen, wo sich natürlich an Stelle der Formel:

$$[\text{illegible}](c) = [\text{illegible}](a) + [\text{illegible}](b) \pm [\text{illegible}](a)[\text{illegible}](b)$$

der Pythagoreische Lehrsatz, die Quelle der gewöhnlichen ebenen Trigonometrie einstellen muß. Daß dies wirklich der Fall ist, mag noch in aller Kürze gezeigt werden.

---

1) Mit c zugleich werden auch a und b Null, daher die Winkelsumme zwei Rechten gleich.

2) Vgl. diese Berichte 1907, S. 192. — Es fehlt hier noch die Einführung der Winkel in die hyperbolische Trigonometrie, welche aber a. a. O. S. 199 ff. in doppelter Weise bereits ausgeführt ist.

Die Funktionalgleichungen 1—4 des § 2 gelten auch hier, doch ist von vornherein

$$E(a) = 1,$$

weil die Abstandslinie eine (zur Grundlinie parallele) Gerade und dem Grundlinienstück gleich ist.

Die Funktionalgleichungen (2), (3) und (4) geben dann sofort

$$J(a) = C_1 \cdot a,$$

$$\bigcirc(a) = C_2 \cdot a,$$

$$\bullet(a) = C_1 C_2 \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Überträgt man ferner die Konstruktionen des § 3 und bedenkt, daß der Winkel zweier Tangenten gleich dem Winkel der Normalen ist, so kommt durch dieselben Betrachtung

$$\bullet(c) = \bullet(a) + \bullet(b),$$

oder

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Es ist bei dieser neuen Ableitung der *Sphärik* und der *hyperbolischen Geometrie* im Gegensatz zu den neueren Arbeiten von Hilbert, Hessenberg und andern der Begriff des Flächeninhalts nicht ausgeschaltet worden, sondern geradezu mit an die Spitze gestellt. Dabei wird dann der ganze Gedankengang so einfach und durchsichtig, auf Grund der allgemeinen Funktionalgleichungen (1) bis (4) des § 2, daß diese Ableitung vielleicht doch noch einiges Interesse beanspruchen darf.

Druckfertig erklärt 31. I. 1909.]

Parameterdarstellung der Raumkurven vierter Ordnung.

Von

J. Thomae.

Die Darstellung der Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies ohne Doppelpunkt mittels elliptischer Funktionen ist seit lange erbracht. Ich selbst habe unter dem Gesichtspunkte, daß die algebraische Darstellung keine andere Irrationalität enthalten soll, als die Determinante des zur Kurve gehörenden Flächenbüschels, in den Berichten vom Jahre 1904 diesen Gegenstand behandelt. Dort sind auch die mir bekannt gewordenen früheren Darstellungen angeführt. Im folgenden will ich die Frage der Parameterdarstellung unter einem anderen Gesichtspunkte diskutieren. Die Kurven sollen durch elliptische Funktionen mit reellen Moduln, die kleiner als Eins sind, und reellen Argumenten möglichst einfach dargestellt werden. Sie zerfallen in drei Typen, je nachdem das zur Kurve gehörende Polartetraeder nur reelle Ecken hat, Typus I, oder nur imaginäre Ecken, Typus II, oder ein Paar reeller und ein Paar imaginärer Ecken, Typus III. Die Kurven vom Typus I sind der sphärischen Ellipse kollinear, für sie ist die aufgestellte Forderung in allbekannter Weise erfüllt. Man setzt einfach die Koordinaten den vier Jacobischen Thetafunktionen, oder was dasselbe ist, den Weierstrassschen Sigmafunktionen, proportional. Da ich hier für alle Fälle einfache Repräsentationen durch reelle elliptische Funktionen geben will, so darf auch dieser, sozusagen triviale Fall nicht fehlen, zumal eine neue Form hinzugefügt werden kann.

In ganz allgemeinen Untersuchungen, in denen es auf Realitätsverhältnisse nicht ankommt, mag man auch bei den Typen II und III dieselbe Form der Darstellung wählen. In der Tat ist eine Untersuchung über die Konfiguration der Wendepunkte und Wendeberührebenen von Herrn Lange in Schlömilchs Zeitschrift, Jahrgang 29,

in dieser Weise durchgeführt. Da aber bei dieser Grundlage in den Fällen II und III die elliptischen Funktionen komplex sind, so ist die Untersuchung der Realitätsverhältnisse in dieser Form schwierig, numerische Rechnungen aber sind nicht durchführbar. Deshalb scheint der von mir für die Parameterdarstellung aufgestellte Gesichtspunkt nicht ohne Bedeutung.

Sollte schon von andrer, mir nicht bekannter Seite in demselben Sinne gearbeitet worden sein, so möchte auch dann noch die Zusammenstellung der hierher gehörigen Formeln nicht unerwünscht sein. Die hier verwendete Bezeichnung ist die in meiner „Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen" (B. G. Teubner, Leipzig 1905) gegebene. Ich werde diese Sammlung mit (F.-S.) und der betreffenden Nummer zitieren.

Kurven vom Typus I.

§ 1. Die Kurven vom Typus I sind, wie schon gesagt, der sphärischen Ellipse kollinear. Sie ist der Schnitt der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 + z^2 - h^2 = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = 0. \tag{2}$$

Soll der Kegel (2) und damit die Kurve reell sein, so muß eine der Größen σ negativ sein. Wir nehmen

$$\sigma_1 < 0 < \sigma_2 < \sigma_3$$

an. Ist $x_0 y_0 z_0$ ein Punkt der Kurve, so kann man die Gleichungen (1) und (2) durch die Gleichungen

$$x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2 + z^2 - z_0^2 = 0,$$

$$\sigma_1(x^2 - x_0^2) + \sigma_2(y^2 - y_0^2) + \sigma_3(z^2 - z_0^2) = 0$$

ersetzen, aus denen folgt:

$$x^2 - x_0^2 = -\lambda t \sigma_{32}, \quad y^2 - y_0^2 = -\lambda t \sigma_{13}, \quad z^2 - z_0^2 = -\lambda t \sigma_{21},$$

wo $-\lambda t$ ein Proportionalitätsfaktor und $\sigma_{\mu\nu} = \sigma_\mu - \sigma_\nu$ ist. Den Punkt $x_0 y_0 z_0$ wählen wir in der xz-Ebene. Dann ist

$$x_0 = h\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_{31}}}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = h\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_{13}}}. \tag{3}$$

Der Punkt ist reell. Die Koordinaten der Kurve sind bei diesen Annahmen:

$$x = x_0\sqrt{1 - \frac{\lambda t \sigma_{32}\sigma_{31}}{h^2\sigma_3}}, \quad y = \sqrt{\lambda t \sigma_{31}}, \quad z = z_0\sqrt{1 + \frac{\lambda t \sigma_{21}\sigma_{31}}{h^2\sigma_1}}. \tag{4}$$

Setzen wir

$$\lambda = -\sigma_1 h^2 : \sigma_{21}\sigma_{31},$$

so erhalten wir

$$(5) \qquad x = x_0\sqrt{1 - k^2 t}, \quad y = h\sqrt{\frac{-\sigma_1 t}{\sigma_{21}}}, \quad z = z_0\sqrt{1 - t},$$

$$(6) \qquad k^2 = \frac{-\sigma_1}{\sigma_{21}} \cdot \frac{\sigma_{32}}{\sigma_3}.$$

Die beiden Faktoren von k^2 sind kleiner als Eins, so daß

$$0 < k < 1$$

ist, was für die Beurteilung der Realitätsverhältnisse und für numerische Berechnungen bequem ist. Es ist noch

$$(7) \qquad k'^2 = 1 - k^2 = \sigma_2\sigma_{31} : \sigma_3\sigma_{21}.$$

Hieraus geht man zur Darstellung durch elliptische Funktionen über, wenn man setzt:

$$(8) \qquad t = sa^2 u, \quad \text{mod. } k,$$

wodurch man die Formeln gewinnt:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = c_1 da\, u, & y = c_2 sa\, u, \qquad z = c_3 ca\, u, \\ c_1 = x_0 = h\sqrt{\dfrac{\sigma_3}{\sigma_{31}}}, & c_2 = h\sqrt{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_{12}}}, \quad c_3 = h\sqrt{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_{13}}}. \end{cases}$$

§ 2. Damit ist die Parameterdarstellung der Raumkurve durch elliptische Funktionen in völlig reeller Form erbracht. Es mag aber noch wünschenswert erscheinen, Formeln aufzustellen, in denen nur *eine* elliptische Funktion und ihre Ableitung vorkommt. Man gelangt dazu durch eine Transformation zweiter Ordnung von Gauss (F.-S. XXI, 2):

$$(10) \qquad \begin{cases} sa(u, k) = \dfrac{2\, sa\left(\dfrac{1+k'}{2} u, \mathfrak{k}\right)}{1 + k' + (1 - k')\, sa^2 \dfrac{1+k'}{2} u}, \\[2ex] ca(u, k) = \dfrac{ca \dfrac{1+k'}{2} u\, da\left(\dfrac{1+k'}{2} u, \mathfrak{k}\right)}{1 + \mathfrak{k}\, sa^2\left(\dfrac{1+k'}{2} u, \mathfrak{k}\right)}, \\[2ex] da(u, k) = \dfrac{1 - \mathfrak{k}\, sa^2\left(\dfrac{1+k'}{2} u, \mathfrak{k}\right)}{1 + \mathfrak{k}\, sa^2\left(\dfrac{1+k'}{2} u, \mathfrak{k}\right)}, \\[2ex] \qquad \mathfrak{k} = \dfrac{1 - k'}{1 + k'}. \end{cases}$$

Ersetzt man $\frac{1}{2}(1+k')u$ durch u und $\mathfrak{k}$ durch k, so erhält man:

$$(11)\quad \begin{cases} x = \dfrac{c_1(1-k sa^2 u)}{1+k sa^2 u}, \quad y = \dfrac{c_2(1+k) sa\, u}{1+k sa^2 u}, \\ z = \dfrac{c_3\, ca\, u\, da\, u}{1+k sa^2 u} = \dfrac{c_3\, sa' u}{1+k\, sa^2 u}, \\ k = \left(\sqrt{\sigma_3\sigma_{21}} - \sqrt{\sigma_2\sigma_{31}}\right) : \left(\sqrt{\sigma_3\sigma_{21}} + \sqrt{\sigma_2\sigma_{31}}\right). \end{cases}$$

Kurven vom Typus II.

§ 3. Besitzt eine Raumkurve vierter Ordnung ein Polartetraeder mit vier lauter imaginären Ecken, so kann man mittels Kollineation die eine reelle Kante zur X-Achse, die andere zur unendlich fernen Geraden der YZ-Ebene machen und zugleich bewirken, daß die beiden Ecken auf der X-Achse zum Koordinatenanfange symmetrisch liegen, auf die Punkte $X = \pm hi$ fallen, und endlich, daß die beiden anderen Ecken auf die absoluten Punkte der YZ-Ebene zu liegen kommen. Dann gewinnen die Gleichungen der zugehörigen Kurve die Form:

$$A_1(Y+Zi)^2 + A_2(Y-Zi)^2 + A_3(X+hi)^2 + A_4(X-hi)^2 = 0,$$
$$A_1'(Y+Zi)^2 + A_2'(Y-Zi)^2 + A_3'(X+hi)^2 + A_4'(X-hi)^2 = 0,$$

wo die A_1, A_2; A_3, A_4; A_1', A_2'; A_3', A_4' in den zusammengeschriebenen Paaren konjugiert imaginär sind, damit die erzeugenden Flächen reelle sind. Durch Kombination dieser mit reellen Konstanten zu multiplizierenden Gleichungen kann man einmal in dem Koeffizienten von $Y+Zi$ den reellen Teil, ein andermal den imaginären Teil zum Verschwinden bringen und so zu den beiden die Kurve definierenden Gleichungen gelangen:

$$(12)\quad i(Y+Zi)^2 - i(Y-Zi)^2 + \mu_1(X+hi)^2 + \mu_2(X-hi)^2 = 0,$$
$$(13)\quad (Y+Zi)^2 + (Y-Zi)^2 + \mu_1'(X+hi)^2 + \mu_2'(X-hi)^2 = 0.$$

Setzen wir $\mu_1 = \sigma_1 + \sigma_2 i$, $\mu_2 = \sigma_1 - \sigma_2 i$, $\mu_1' = \sigma_1' + \sigma_2' i$, $\mu_2' = \sigma_1' - \sigma_2' i$, so nehmen die Gleichungen nach Unterdrückung des Faktors 2 die Gestalt an:

$$(12\text{a})\quad -2YZ + \sigma_1(X^2 - h^2) - 2\sigma_2 h X = 0,$$
$$(13\text{a})\quad Y^2 - Z^2 + \sigma_1'(X^2 - h^2) - 2\sigma_2' h X = 0.$$

Vertauscht man YZ, so ändert sich (12a) nicht, und (13a) behält seine Form, wenn man mit -1 multipliziert. Man kann deshalb über das Vorzeichen von σ_1' frei verfügen. Ersetzt man Y durch $-Y$, so ändert sich (13a) nicht, (12a) aber gewinnt seine Form wieder,

wenn man mit -1 multipliziert. Man kann deshalb, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, auch über das Vorzeichen von σ_1 verfügen.

Wir werden hier σ_1 als positiv voraussetzen.

Eliminiert man aus (12a) und (13a) X^2 und setzt $\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2' - \sigma_2 \sigma_1'$, so erhält man die Gleichung:

$$(14) \qquad \sigma_1 Y^2 + 2\sigma_1' YZ - \sigma_1 Z^2 - 2h\sigma_{12} X = 0 .$$

Die Größe σ_{12} kann nicht Null sein, weil sonst die Kurve in zwei ebene Stücke zerfiele. Die Gleichung (14) und die Gleichung (12a), die wir jetzt noch mit (15) numerieren wollen:

$$(15) \qquad -2YZ + \sigma_1(X^2 - h^2) - 2\sigma_2 h X = 0$$

dienen zur Bestimmung der Kurve.

§ 4. *Die einfachsten Gleichungen der erzeugenden Flächen.* Wir führen jetzt neue, wieder rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$(16) \qquad \begin{cases} X = x, \quad Y + qZ = y, \quad qY - Z = z, \\ Y = \frac{1}{1+q^2}(qz + y), \quad Z = \frac{1}{1+q^2}(qy - z), \end{cases}$$

wo

$$q = \frac{\sigma_1' + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1'^2}}{\sigma_1}, \quad -\frac{1}{q} = \frac{\sigma_1' - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1'^2}}{\sigma_1}$$

und q positiv ist, weil σ_1 positiv angenommen wurde. Dadurch fließen aus (14) und (15) die Gleichungen:

$$(17a) \qquad \frac{\sigma_1}{q} yz - 2h\sigma_{12} x = 0,$$

$$(18a) \qquad \frac{2}{(1+q^2)^2}(qz + y)(z - qy) + \sigma_1(x^2 - h^2) - 2\sigma_2 hx = 0,$$

oder wenn wir $2q\sigma_{12} : \sigma_1$ durch σ ersetzen und $\frac{(1+q^2)}{2}$ in σ_1 und σ_2 einrechnen, wodurch das Vorzeichen von σ_1 nicht geändert wird:

$$(17) \qquad yz - h\sigma x = 0,$$

$$(18) \qquad (qz + y)(z - qy) + \sigma_1(x^2 - h^2) - 2\sigma_2 hx = 0.$$

Multipliziert man (17) mit $1 - q^2$ und zieht dann die Gleichung von (18) ab, so folgt:

$$(19) \qquad q(z^2 - y^2) + \sigma_1(x^2 - h^2) - 2\left(\sigma_2 - \frac{1-q^2}{2}\sigma\right) hx = 0 .$$

Wir nehmen σ als positiv an, was nötigenfalls dadurch erreicht werden kann, daß man $-x$ für x schreibt, und ersetzen y durch $\sqrt{\sigma}\, y$,

z durch $\sqrt{\sigma z}$, dann dividieren wir (19) durch die positive Größe $q\sigma$ und schreiben wieder σ_1 für $\sigma_1 : q\sigma$, σ_2 für $(\sigma_2 - \frac{1}{2}(1 - q^2)\sigma) : q\sigma$. Dadurch erhalten wir für die Kurve, der alle Kurven vom Typus II kollinear sind, die Gleichungen:

$$(20) \qquad yz = hx,$$

$$(21) \qquad z^2 - y^2 + \sigma_1(x^2 - h^2) - 2\sigma_2 hx = 0,$$

die wir als die schließlichen annehmen und an die wir die weiteren Untersuchungen knüpfen. Bei allen Transformationen und Bezeichnungsänderungen ist σ_1 positiv geblieben. Die Anzahl der willkürlichen Parameter ist wie bei der sphärischen Ellipse drei. Es empfiehlt sich nicht, $h = 1$ anzunehmen, was noch zulässig wäre, weil dadurch die Homogenität in den Linien verloren ginge.

Für $y = 0$ ist $x = 0$, $z = \pm h\sqrt{\sigma_1}$; das sind zwei reelle Punkte. Für $z = 0$, $x = 0$ folgt $y = \pm ih\sqrt{\sigma_1}$; das sind zwei imaginäre Punkte. Zu $y = 0$ gehören noch zwei unendlich ferne Punkte. Für sie ist $z^2 + \sigma_1 x^2 = 0$, sie sind imaginär. Zu $z = 0$ gehören auch zwei unendlich ferne Punkte. Für sie ist $y^2 - \sigma_1 x^2 = 0$, sie sind reell.

§ 5. *Vorbereitung zur Einführung eines Parameters.* Eliminiert man x aus (20) und (21), so folgt:

$$(22) \qquad 0 = z^2 - y^2 + \frac{\sigma_1 y^2 z^2}{h^2} - \sigma_1 h^2 - 2\sigma_2 yz$$

$$= z^2 - y^2 + \frac{\sigma_1}{h^2}\left(yz - \frac{h^2(\sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})}{\sigma_1}\right)\left(yz - \frac{h^2(\sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})}{\sigma_1}\right),$$

oder wenn man nach Potenzen von z ordnet und y durch λh ersetzt, wo λ ein veränderlicher Parameter ist:

$$(23) \qquad z^2(1 + \sigma_1\lambda^2) - 2z\lambda h\sigma_2 - h^2(\sigma_1 + \lambda^2) = 0,$$

und durch Auflösung nach z:

$$(24) \qquad z = \frac{\lambda h\sigma_2 \pm h\sqrt{\sigma_2^2\lambda^2 + (1 + \sigma_1\lambda^2)(\sigma_1 + \lambda^2)}}{1 + \sigma_1\lambda^2}.$$

Der Ausdruck unter der Wurzel, nach Potenzen von λ geordnet, ist:

$$(25) \qquad \sigma_1 + (1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)\lambda^2 + \sigma_1\lambda^4.$$

Die Diskriminante dieser Form

$$(26) \qquad (1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4\sigma_1^2 = (\sigma_2^2 + (\sigma_1 - 1)^2)(\sigma_2^2 + (\sigma_1 + 1)^2)$$

ist positiv. Der Ausdruck (25), gleich Null gesetzt, hat deshalb für λ^2 zwei reelle Wurzeln mit negativem Zeichen, weil ihre Summe

negativ, ihr Produkt positiv ist. Für λ aber ergeben sich zwei Paare (rein) imaginärer Wurzeln. Für reelle λ ist deshalb z stets reell. Die Kurve ist zweizügig, verschiedenen Vorzeichen der Wurzel (in (24)) entsprechen Punkte der verschiedenen getrennten Zweige. Die Ebene $y = h\lambda$ trifft die Kurve in je einem Punkte des einen und des andern Zuges. Nach dem Prinzip der Kontinuität folgert man hieraus leicht, daß jede Ebene mit jedem Zweige eine ungerade Anzahl von Punkten gemein hat, jeden Zweig also mindestens einmal trifft, daß die Züge unpaar sind.

Aus der zweiten Form der Gleichung (22) folgert man, daß die durch sie dargestellte Kurve vierter Ordnung durch zwei projektive Hyperbelbüschel

$$\left(yz - h^2\frac{\sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1}\right)\frac{\sqrt{\sigma_1}}{h} + \lambda(y+z) = 0,$$

$$\lambda(y-z) + \left(yz - h^2\frac{\sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1}\right)\frac{\sqrt{\sigma_1}}{h} = 0$$

erzeugt werden kann. Die unendlich fernen Punkte der gleichseitigen Hyperbeln sind Doppelpunkte der Kurve.

Bezieht man die Raumkurve auf die (imaginären) Ebenen ihres Polartetraeders, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(z+yi)^2 + (z-yi)^2 + (\sigma_1+\sigma_2 i)(x+hi)^2 + (\sigma_1-\sigma_2 i)(x-hi)^2 = 0,$$
$$-i(z+yi)^2 + i(z-yi)^2 + i(x+hi)^2 - i(x-hi)^2 = 0.$$

§ 6. *Einführung eines Parameters.* Bezeichnen wir den Ausdruck unter (26) mit D, so ist

$$(27)\qquad \sigma_1 + \lambda^2(1+\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \sigma_1\lambda^4$$
$$= \sigma_1\left(1 + \frac{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sqrt{D}}{2\sigma_1}\lambda^2\right)\left(1 + \frac{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sqrt{D}}{2\sigma_1}\lambda^2\right),$$

und wenn wir mittels der Beziehung

$$(28)\qquad \lambda = t\sqrt{\frac{2\sigma_1}{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sqrt{D}}}$$

einen neuen laufenden Parameter einführen:

$$(27\text{a})\quad \sigma_1 + \lambda^2(1+\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \sigma_1\lambda^4 = \sigma_1(1+t^2)(1+k'^2t^2)$$

wo

$$k'^2 = \frac{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sqrt{D}}{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sqrt{D}}$$

positiv und kleiner als Eins ist. Wir notieren die Beziehungen:

$$
(29)\quad \begin{cases}
k'^2 = \dfrac{(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{D})^2}{4\sigma_1^2}, \\[2ex]
k' = \dfrac{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{D}}{2\sigma_1} = \dfrac{2\sigma_1}{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{D}}, \\[2ex]
\dfrac{1}{k'} = \dfrac{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{D}}{2\sigma_1}, \\[2ex]
k' + \dfrac{1}{k'} = \dfrac{1 + k'^2}{k'} = \dfrac{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1}, \quad \dfrac{1}{k'} - k' = \dfrac{\sqrt{D}}{\sigma_1}, \\[2ex]
\sigma_1 k'^2 - (1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) k' + \sigma_1 = 0, \\[2ex]
k^2 = \dfrac{\sqrt{D}}{2\sigma_1^2}\left(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{D}\right), \quad \lambda = t\sqrt{k'}.
\end{cases}
$$

Man könnte σ_1 oder σ_2 entfernen, durch k' ausdrücken, was aber nicht vorteilhaft erscheint.

Nun lassen sich x, y, z durch den Parameter t wie folgt ausdrücken:

$$
(30)\quad \begin{cases}
y = h\sqrt{k'}\,t, \quad z = h\dfrac{\sigma_2\sqrt{k'}\,t + \sqrt{\sigma_1}\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}{1 + \sigma_1 k' t^2}, \\[2ex]
x^2 = h\sqrt{k'}\,t\,\dfrac{\sigma_2\sqrt{k'}\,t + \sqrt{\sigma_1}\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}{1 + \sigma_1 k' t^2}.
\end{cases}
$$

Ein besonders einfacher Fall ist der, in dem $\sigma_2 = 0$ ist, in welchem das Hyperboloid (21) seinen Mittelpunkt im Koordinatenanfange hat. Dann ist $D = (\sigma_1 - 1)^2$ und $\sqrt{D} = \sigma_1 - 1$, wenn $\sigma_1 > 1$ ist, $\sqrt{D} = 1 - \sigma_1$, wenn $\sigma_1 < 1$ ist. Es ergibt sich im Falle $\sigma_1 > 1$:

$$
k'^2 = \frac{\sigma_1^2 + 1 - \sigma_1^2 + 1}{\sigma_1^2 + 1 + \sigma_1^2 - 1} = \frac{1}{\sigma_1^2}, \quad k' = \frac{1}{\sigma_1}.
$$

Im Falle $\sigma_1 < 1$ ergibt sich:

$$
k' = \sigma_1.
$$

Nehmen wir $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 < 1$, so ergeben sich die Kurvengleichungen:

$$
(31)\quad \begin{cases}
y = h\sqrt{\sigma_1}\,t, \quad z = \dfrac{h\sqrt{\sigma_1}\sqrt{(1+t^2)(1+\sigma_1^2t^2)}}{1+\sigma_1^2t^2}, \\[2ex]
x = \dfrac{h\sigma_1 t\sqrt{(1+t^2)(1+\sigma_1^2t^2)}\,t}{1+\sigma_1^2t^2}.
\end{cases}
$$

Probe.

$$yz = \frac{h^2\sigma_1 t\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}{1+\sigma_1^2 t^2} = hx,$$

$$z^2 - y^2 = \frac{\sigma_1 h^2}{(1+\sigma_1^2t^2)^2}(1 + (1+\sigma_1^2)t^2 + \sigma_1^2 t^4 - t^2(1+\sigma_1^2t^2)^2)$$

$$= \frac{\sigma_1 h^2}{(1+\sigma_1^2t^2)^2}(1 + \sigma_1^2 t^2 - \sigma_1^2 t^4 - \sigma_1^4 t^6)$$

$$z^2 - y^2 + \sigma_1 x^2 =$$

$$\frac{\sigma_1 h^2}{(1+\sigma_1^2t^2)^2}(1 + \sigma_1^2t^2 - \sigma_1^2t^4 - \sigma_1^4t^6 + \sigma_1^2t^2 + (\sigma_1^2+\sigma_1^4)t^4 + \sigma_1^4t^6)$$

$$= \frac{\sigma_1 h^2}{(1+\sigma_1^2t^2)^2}(1 + 2\sigma_1^2t^2 + \sigma_1^4t^4) = \sigma_1 h^2.$$

§ 7. *Darstellung der Koordinaten durch elliptische Funktionen.* Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück und setzen (F.-S. XIV, 4)

$$k = \sqrt{1-k'^2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{D}}{1+\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sqrt{D}}}$$

als Modul annehmend

$$t = tga\,u, \quad \sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)} = tga'\,u,$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$(32)\quad \begin{cases} y = h\sqrt{k'}\,tga\,u, \quad z = h\dfrac{\sigma_2\sqrt{k'}\,tga\,u + \sqrt{\sigma_1}\,tga'\,u}{1+\sigma_1 k'\,tga^2 u}, \\[2ex] x = h\sqrt{k'}\,tga\,u\,\dfrac{\sigma_2\sqrt{k'}\,tga\,u + \sqrt{\sigma_1}\,tga'\,u}{1+\sigma_1 k'\,tga^2 u}. \end{cases}$$

Die Koordinaten sind damit durch *eine* elliptische Funktion und deren Ableitung in reeller Form dargestellt. Die Funktionen $tga\,u$, $tga'\,u$ haben die (Jacobischen) Perioden

$$2K, \quad 4iK',$$

ihre Unendlichkeitsstellen liegen bei

$$u = K, \quad u = K + 2iK'.$$

Es ist deshalb

$$tga(2iK' - u) = tga\,u, \quad tga(2iK' + u) = -\,tga\,u,$$

$$tga'(2iK' - u) = tga'(2iK' + u) = -\,tga'u.$$

Wir unterrichten uns noch über die Größenverhältnisse der in den Nennern auftretenden Größe $\sigma_1 k'$, und der Größe $\sigma_1 : k'$, wo σ_1 immer positiv ist. Der Ausdruck

$$\sigma_1 k' = 2\sigma_1^2 : (1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{D})$$

hat für $\sigma_2 = 0$, wenn $\sigma_1 > 1$ ist, den Wert Eins. Er nimmt mit wachsendem σ_2 ab, also ist:

$$k' < \sigma_1 k' < 1 ; \quad \sigma_1 > 1 . \tag{33}$$

Der Ausdruck

$$\frac{k'}{\sigma_1} = \frac{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{D}}{2\sigma_1^2} = \frac{2}{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{D}}$$

ist für $\sigma_2 = 0$ gleich Eins, wenn $\sigma_1 < 1$ ist. Er nimmt ab, wenn σ_2 wächst, also ist

$$k' < \frac{k'}{\sigma_1} < 1 ; \quad \sigma_1 < 1 . \tag{34}$$

§ 8. *Die Summe der Argumentwerte der Kurvenpunkte in einer Ebene.* Der Ausdruck

$$\varphi(u) = Ax + By + Cz + D,$$

in dem $ABCD$ Konstanten sind, ist eine doppeltperiodische Funktion vierter Ordnung mit den Perioden $2K$, $4iK'$. Es wird zunächst x und y an den beiden Stellen unendlich groß, in denen $tga\,u$ unendlich groß wird; also in den Punkten

$$K, \quad K + 2iK'.$$

Verschwindet in einem der beiden Bestandteile z, x von $\varphi(u)$ der Nenner $1 + \sigma_1 k' \, tga^2 u$, etwa für $u = w$, so verschwindet er auch noch an den Stellen $-w$, $w + 2iK'$, $-w + 2iK'$, aber nur an zwei dieser Stellen werden z und x unendlich groß, in den beiden andern verschwindet zugleich der Zähler und z, x bleiben endlich. Verschwindet in z der Zähler, verschwindet also

$$\sigma_2 \sqrt{k'} \, tga\, u + \sqrt{\sigma_1} \, tga'\, u$$

und mit ihm der Nenner $1 + \sigma_1 \sqrt{k'} \, tga^2 u$ für $u = -w$, so verschwindet der Zähler für $u = w$ nicht, denn nur $tga\,u$ wechselt sein Zeichen, $tga'u$ bleibt ungeändert. Für $u = w + 2iK'$ wechseln beide Bestandteile des Zählers ihre Zeichen, z und x werden dort unendlich groß. An der Stelle $-w + 2iK'$ bleibt er endlich. Die Summe der Argumentwerte u_1, u_2, u_3, u_4 für die $\varphi(u)$ unendlich groß wird ist demnach:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2w ,$$

und Argumentwerte, die diese Kongruenz befriedigen, liefern Punkte in einer Ebene.

Von w läßt sich wenigstens der imaginäre Teil allgemein bestimmen. Ist $\sigma_1 > 1$ so setzen wir

$$w = v + iK'$$

und erhalten (F.-S. X 14)

$$1 + \sigma_1 k' tga^2 w = 1 - \frac{\sigma_1 k'}{da^2 v},$$

und wenn man dies gleich Null setzt,

$$da\, v = \sqrt{\sigma_1 k'}.$$

Da aber nach (33) $\sqrt{\sigma_1 k'}$ zwischen k' und 1 liegt, so wird die Gleichung durch ein reelles v befriedigt, etwa für $v = v_0$.

Ist $\sigma_1 < 1$, so setzen wir

$$w = v + K + iK'$$

und erhalten (F.-S. X 15)

$$1 + \sigma_1 k' tgu^2 w = 1 - \frac{\sigma_1}{k'} da^2 v, \qquad da\, v = \sqrt{\frac{k'}{\sigma_1}}.$$

Da aber nach (34) $\sqrt{\sigma_1 : k'}$ zwischen k' und 1 liegt, so wird auch diese Gleichung durch ein reelles v befriedigt. Schreiben wir v_0 für $v + K$, so wird in allen Fällen:

$$2w \equiv 2v_0 + 2iK'.$$

Die Summe der Argumentwerte $u_1 u_2 u_3 u_4$ der Punkte einer Ebene befriedigt demnach die Kongruenz

$$(35) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2v_0 + 2iK',$$

wo v_0 eine reelle Größe ist.

In dem speziellen Falle $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 > 1$ ist $da\, v_0 = k'$, $v_0 = K$. Ist aber $\sigma_1 < 1$, so ist $da\, v = 1$, $v = 0$, und da in diesem Falle $v_0 = v + K$ ist, so ist auch hier $v_0 = K$, und wir haben in diesen speziellen Fällen:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2iK'.$$

§ 9. *Nebenbemerkung über Wende- und Geschwisterpunkte.* Die Argumentwerte der Wendepunkte, in denen $4u \equiv 2v_0 + 2iK'$ ist, sind in der Form enthalten:

$$\frac{v_0}{2} + \frac{iK'}{2} + \frac{\lambda K}{2} + \mu i K',$$

wo λ und μ ganze Zahlen sind. Da durch keinen Wert von μ der imaginäre Teil zum Verschwinden gebracht werden kann, so sind

die Wendepunkte sämtlich imaginär. Dies ist auch von vornherein zu erkennen, weil beide Züge der Kurve unpaar sind.

Trifft die Schmiegungsebene eines Punktes $u = \alpha$ die Kurve in einem weiteren Punkte $u = \alpha'$, und trifft die Schmiegungsebene von α' die Kurve wieder in α, so ist

$$3\alpha + \alpha' \equiv 2v_0 + 2iK',$$
$$3\alpha' + \alpha \equiv 2v_0 + 2iK',$$
$$8\alpha \equiv 4v_0.$$

Nennen wir solche Punkte Geschwisterpunkte, so sind ihre Argumente in der Form enthalten

$$\alpha \equiv \frac{v_0}{2} + \frac{\lambda K}{4} + \frac{\mu i K'}{2}.$$

Scheidet man die Wendepunkte aus, so gibt es vierundzwanzig Paar solcher Punkte. Die $\mu = 0$ und $\mu = 4$ entsprechenden sind reell. Es gibt daher, wie schon Harnack bemerkt hat, acht reelle Paare. Die Punkte eines Paares liegen auf verschiedenen Zügen der Kurve.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit wird Herr Güntzel über die Gruppierung der Geschwisterpunkte für den Fall eines reellen Polartetraeders eine Untersuchung ausführen. Ähnliche Betrachtungen für den vorliegenden Fall gedenke ich ein andermal anzustellen.

In dem speziellen Falle $\sigma_2 = 0$ sind die beiden auf der z-Achse gelegenen Punkte ($\alpha = 0,\ 2iK'$) reelle Geschwisterpunkte.

§ 10. *Andere Form der Koordinatendarstellung.* Will man lieber die Koordinaten durch $sa u$, $ca u$, $da u$ ausdrücken, so beachte man, daß

$$tga u = sa u : ca u, \quad tga' u = da u : ca^2 u$$

ist. Dadurch erhält man die Formen:

$$(36) \quad \begin{cases} y = \dfrac{h\sqrt{k'}\, sa u}{ca u}, \quad z = h\dfrac{\sigma_2\sqrt{k'}\, sa u\, ca u + \sqrt{\sigma_1}\, da u}{1 - (1 - \sigma_1 k')sa^2 u}, \\[2ex] x = \dfrac{h\sqrt{k'}\, sa u}{ca u} \dfrac{(\sigma_2\sqrt{k'}\, sa u\, ca u + \sqrt{\sigma_1}\, da u)}{1 - (1 - \sigma_1 k')sa^2 u}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich sehr, wenn $\sigma_2 = 0$ ist. Nehmen wir noch $\sigma_1 > 1$ an, so daß $k' = 1 : \sigma_1$ wird, so findet man in diesem speziellen Falle:

$$(36a) \quad y = \frac{h\sqrt{k'}\, sa u}{ca u}, \qquad z = \frac{h}{\sqrt{k'}} da u, \qquad x = \frac{h\, sa u\, da u}{ca u}.$$

Probe:

$$yz = \frac{h^2 da u sa u}{ca u} = hx,$$

$$z^2 - y^2 = \frac{h^2}{k'} \frac{(1 - k^2 sa^2 u \cdot 1 - sa^2 u - (1 - k^2) sa^2 u)}{ca^2 u}$$

$$= \frac{h^2}{k'} (1 - 2 sa^2 u + k^2 sa^4 u) : ca^2 u,$$

$$\sigma_1 x^2 = \frac{h^2}{k'} \frac{sa^2 u - k^2 sa^4 u}{ca^2 u},$$

$$z^2 - y^2 + \sigma_1 x^2 = \frac{\sigma_1 h^2 (1 - sa^2 u)}{ca^2 u} = \sigma_1 h^2.$$

Kurven vom Typus III.

§ 11. *Einzügige Kurven.* Sind von den Ecken des Polartetraeders zwei reell und zwei imaginär, so können wir durch Kollineation die beiden reellen Seitenflächen des Tetraeders zur xy- und xz-Ebene machen und als reelle Ecken die unendlich fernen Punkte der y- und z-Achse annehmen. Die beiden imaginären Ecken aber können wir auf die Punkte $x = \pm hi$, $y = 0$, $z = 0$ werfen. Dadurch gewinnen die Gleichungen der die Kurve erzeugenden Flächen zweiten Grades die Formen

$$(37) \qquad \begin{aligned} A_1 y^2 + A_2 z^2 + A_3 (x + hi)^2 + A_4 (x - hi)^2 = 0, \\ A'_1 y^2 + A'_2 z^2 + A'_3 (x + hi) + A'_4 (x - hi)^2 = 0, \end{aligned}$$

wo $A_1 A_2 A'_1 A'_2$ reell, $A_3 A_4$ und $A'_3 A'_4$ konjugiert imaginär sein müssen, damit die Flächen reelle sind. Entfernt man durch Kombination der beiden Gleichungen (37) einmal z^2, ein andermal y^2, so werden sie durch Gleichungen der Form ersetzt:

$$(38) \qquad \begin{aligned} B_1 y^2 + B_3 (x + hi)^2 + B_4 (x - hi)^2 = 0, \\ B'_1 z^2 + B'_3 (x + hi)^2 + B'_4 (x - hi)^2 = 0 \end{aligned}$$

oder nach Division mit B_1 und B'_1 durch Gleichungen der Form

$$(39) \qquad y^2 = - \sigma_1 (x^2 - h^2) + 2 \sigma_2 hx = 0,$$

$$(40) \qquad z^2 = - \sigma'_1 (x^2 - h^2) + 2 \sigma'_2 hx = 0,$$

wo die $\sigma_1 \sigma_2 \sigma'_1 \sigma'_2$ reelle Größen sind. Es können $\sigma_1 \sigma'_1$ nicht gleichzeitig Null sein, denn in diesem Falle würde durch Kombination folgen

$$y^2 \sigma'_2 - z^2 \sigma_2 = 0,$$

die Kurve würde in ebene Zweige zerfallen. Wir wollen σ_1 als von Null verschieden annehmen. Dann können wir immer noch über das Vorzeichen von

$$\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2' - \sigma_2 \sigma_1'$$

frei verfügen, weil der Ausdruck sein Zeichen wechselt, wenn man $-x$ für x schreibt. Da also σ_1 nicht Null ist, so können wir (36) in die Form setzen

$$(39a) \qquad y = -\sigma_1(x - hq)\left(x + \frac{h}{q}\right),$$

wo

$$(41) \qquad \begin{cases} q = \dfrac{\sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1}, & -\dfrac{1}{q} = \dfrac{\sigma_2 \mp \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1}, \\ q - \dfrac{1}{q} = \dfrac{2\sigma_2}{\sigma_1}, & q + \dfrac{1}{q} = \dfrac{\pm 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1}, \end{cases}$$

ist. Man kann das Vorzeichen der Wurzel so wählen, daß q nach Wunsch positiv oder negativ wird.

Es lassen sich die Kurvengleichungen dadurch ärmer an Konstanten machen, daß man y, z bez. durch $y\sqrt[4]{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $z\sqrt[4]{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2}$ ersetzt, und mit $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ bez. $\sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2}$ dividiert. Dadurch werden die Gleichungen der Kurve

$$(42) \qquad y^2 = -\cos\vartheta(x^2 - h^2) + 2hx\sin\vartheta = 0,$$

$$(43) \qquad z^2 = -\cos\vartheta'(x^2 - h^2) + 2hx\sin\vartheta' = 0,$$

so daß die Gleichungen wie in den früheren Fällen nur noch drei Parameter enthalten. Wie wollen jedoch mit den Gleichungen (39) und (40) weiter arbeiten.

Wir setzen

$$(44) \qquad \lambda = \frac{x - hq}{xq + h}, \quad x = h\frac{q + \lambda}{1 - q\lambda}, \quad xq + h = \frac{h(1 + q^2)}{1 - q\lambda},$$

so folgt

$$(45) \qquad \begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{-\sigma_1}{q}}(xq + h)\sqrt{\frac{x - hq}{xq + h}} = \sqrt{\frac{-\sigma_1}{q}}\frac{h(1 + q^2)}{1 - q\lambda}\sqrt{\lambda} \\ &= 2\sqrt{\frac{-q}{\sigma_1}}\frac{h\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{1 - q\lambda}\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Um für positive λ reelle Werte von y zu erhalten, wählen wir das Vorzeichen von q dem von σ_1 entgegengesetzt. Für z^2 ergibt sich

$$z^2 = -\sigma_1'(x^2 - h^2) + 2\sigma_2' h x$$

$$= -\sigma_1' h^2 \frac{(q+\lambda)^2 - (1-q\lambda)^2 - 2\sigma_2(q+\lambda)(1-q\lambda) : \sigma_1'}{(1-q\lambda)^2}$$

$$= \frac{h^2 q}{(1-q\lambda)^2}\left\{-\sigma_1'\left(q - \frac{1}{q}\right) - 4\sigma_1'\lambda + \sigma_1'\left(q - \frac{1}{q}\right)\lambda^2 + 2\sigma_2'\left[1 + \lambda\left(\frac{1}{q} - q\right) - \lambda^2\right]\right.$$

$$= \frac{2h^2 q}{\sigma_1(1-q\lambda)^2}\{-\sigma_1'\sigma_2 + \sigma_2'\sigma_1 - 2\lambda(\sigma_1'\sigma_1 + \sigma_2\sigma_2') + (\sigma_1'\sigma_2 - \sigma_2'\sigma_1)\lambda^2\}$$

$$= \frac{2h^2 q(\sigma_{12} - 2(\sigma_1\sigma_1' + \sigma_2\sigma_2')\lambda - \sigma_{12}\lambda^2)}{\sigma_1(1-q\lambda)^2}.$$

Die Diskriminante der Form unter der Klammer des Zählers

$$(\sigma_1\sigma_1' + \sigma_2\sigma_2')^2 + 4\sigma_{12}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2)$$

ist positiv. Setzt man diese Klammer gleich Null, so hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen, ihr Produkt ist die negative Einheit. Bezeichnet man die positive Wurzel durch l, so ist die negative $-1 : l$, und man erhält für z die Gleichung

$$(46) \qquad z = \frac{h\sqrt{2q\sigma_{12}}}{\sqrt{\sigma_1}(1-q\lambda)}\left(1 - \frac{\lambda}{l}\right)(1 + \lambda l)\,.$$

Da q das entgegengesetzte Vorzeichen als σ_1 hat, so müssen wir, wenn z für positive $\lambda < 1$ reell sein soll, über σ_{12} so verfügen, daß sein Vorzeichen negativ ist, was nach obigem zulässig ist. Für die Größe l aber ergibt sich, weil σ_{12} negativ ist

$$(47) \qquad l = \frac{-\sigma_1\sigma_1' - \sigma_2\sigma_2' - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2)}}{\sigma_{12}}\,.$$

Nun führen wir einen neuen veränderlichen Parameter t durch die Beziehung

$$\lambda = lt$$

ein, so werden die Kurvengleichungen:

$$(48) \qquad \begin{gathered} x = h\frac{q + lt}{1 - qlt}, \qquad y = \frac{h(1+q^2)}{1 - qlt}\sqrt{\frac{-\sigma_1 l}{q}}\sqrt{t}\,, \\ z = h\sqrt{\frac{2q\sigma_{12}}{\sigma_1}}\,\frac{\sqrt{(1-t)(1+l^2 t)}}{1 - qlt}\,. \end{gathered}$$

Legt man die reduzierten Gleichungen unter (42) und (43) zugrunde, so ist

$$(49) \qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_{12} &= \cos\vartheta\sin\vartheta' - \sin\vartheta\cos\vartheta' = \sin(\vartheta' - \vartheta), \\ l &= \frac{-\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta' - 1}{\sin(\vartheta' - \vartheta)} = -\frac{\cos(\vartheta' - \vartheta) + 1}{\sin(\vartheta' - \vartheta)} \\ &= -\operatorname{cotg}\frac{\vartheta' - \vartheta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta - \vartheta'}{2}\,. \end{aligned}\right.$$

Bei unseren Annahmen ist $\sin\vartheta' - \vartheta$ negativ. Weiter ist

$$q = \frac{\sin\vartheta \pm 1}{\cos\vartheta},$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, daß $q\cos\vartheta$ negativ wird, also ist das Minuszeichen zu nehmen.

Die den verschiedenen Vorzeichen von $\sqrt{t}$ und $\sqrt{(1-t)(1+l^2t)}$ entsprechenden Kurvenstücke hängen an den Stellen $t=0$ und $t=1$ miteinander zusammen, die Kurve ist einzügig. Daß dieser Zug ein paarer ist, ist selbstverständlich. Denn jede reelle Ebene kann ihn nur in einer geraden Anzahl imaginärer Punkte treffen.

§ 12. Probe. Es ist

$$y^2 = -\frac{h^2\sigma_1 lq\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 t}{(1-qlt)^2} = -\frac{4h^2lq(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t}{\sigma_1(1-qlt)^2},$$

$$\sigma_1(x^2-h^2) = \frac{2h^2q(\sigma_2+2\sigma_1 lt-\sigma_2 l^2t^2)}{(1-qlt)^2},$$

$$-2\sigma_2 hx = \frac{-2h^2q}{(1-qlt)^2}\left(\sigma_2 - \frac{2\sigma_2^2 lt}{\sigma_1} - \sigma_2 l^2t^2\right).$$

Durch Addition folgt:

$$y^2+\sigma_1(x^2-h^2)-2\sigma_2 hx$$

$$= \frac{h^2q}{\sigma_1(1-qlt)^2}\begin{Bmatrix} -4\sigma_1^2tl - 4\sigma_2^2lt + 2\sigma_2\sigma_1 + 4\sigma_1^2lt \\ -2\sigma_2\sigma_1 l^2t^2 - 2\sigma_2\sigma_1 + 4\sigma_2^2lt + 2\sigma_2\sigma_1 l^2t^2 \end{Bmatrix}.$$

Die Klammer verschwindet identisch. Es ist also

$$y^2+\sigma_1(x^2-h)-2\sigma_2 hx^2 = 0.$$

Weiter ist

$$z^2 = \frac{2qh^2}{\sigma_1(1-qlt)^2}(\sigma_{12}-\sigma_{12}(1-l^2)t-\sigma_{12}l^2t^2),$$

$$\sigma_1'(x^2-h^2) = \frac{2qh^2}{\sigma_1(1-qlt)^2}(\sigma_2\sigma_1'+2\sigma_1\sigma_1' lt-\sigma_2\sigma_1' l^2t^2),$$

$$-2\sigma_2' hx = -\frac{2qh^2}{\sigma_1(1-qlt)^2}(\sigma_1\sigma_2'-2\sigma_2\sigma_2' lt-\sigma_1\sigma_2' l^2t^2).$$

Addiert man, so folgt:

$$z^2+\sigma_1'(x^2-h^2)-2\sigma_2' hx$$

$$= \frac{2qh^2}{\sigma_1(1-qlt)^2}(\sigma_{12}l^2+2(\sigma_1\sigma_1'+\sigma_2\sigma_2')l-\sigma_{12}).$$

Der Zähler ist nach (47) gleich Null, so daß auch die Gleichung (40) erfüllt ist.

§ 13. *Darstellung durch elliptische Funktionen.* Wir setzen (F.-S. XIV, 5)

$$(50)\quad \begin{cases} l^2 = \dfrac{k^2}{k'^2}, \quad k^2 = \dfrac{l^2}{1+l^2}, \quad \sqrt{t} = ja\,u = \dfrac{k'\,sa\,u}{da\,u}, \\ ja'u = \sqrt{(1 - ja^2 u)\left(1 + \dfrac{k^2}{k'^2} ja^2 u\right)} = \dfrac{k'\,ca\,u}{da^2 u}. \end{cases}$$

Dadurch ergibt sich als Darstellung der Kurvenkoordinaten mittels elliptischer Funktionen mit einem reellen Modul kleiner als Eins:

$$(51)\quad \begin{cases} x = h\,\dfrac{q + \dfrac{k}{k'} ja^2 u}{1 - \dfrac{qk}{k'} ja^2 u}, \quad y = 2h\sqrt{\dfrac{-q(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)k}{\sigma_1 k'}}\,\dfrac{ja\,u}{1 - \dfrac{qk}{k'} ja^2 u}, \\ z = h\sqrt{\dfrac{2q\sigma_{12}}{\sigma_1}}\,\dfrac{\sqrt{(1 - ja^2 u)\left(1 + \dfrac{k^2}{k'^2} ja^2 u\right)}}{1 - \dfrac{qk}{k'} ja^2 u} \\ \quad = h\sqrt{\dfrac{2q\sigma_{12}}{\sigma_1}}\,\dfrac{ja'\,u}{1 - \dfrac{qk}{k'} ja^2 u}. \end{cases}$$

Damit sind die Koordinaten durch *eine* elliptische Funktion und ihre Ableitung dargestellt. Wünscht man zur Darstellung nur die Funktionen *sau*, *cau*, *dau* zu verwenden, so leistet man dies durch die Formeln:

$$(52)\quad \begin{cases} x = h\,\dfrac{q\,da^2 u + k k' sa^2 u}{da^2 u - q k k' sa^2 u}, \\ y = h\sqrt{\dfrac{-2q(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)k k'}{2\sigma_1}}\,\dfrac{sa\,u\,da\,u}{da^2 u - q k k' sa^2 u}, \\ z = h\sqrt{\dfrac{2q\sigma_{12}}{\sigma_1}}\,\dfrac{k'\,ca\,u}{da^2 u - q k k' sa^2 u}, \end{cases}$$

wo q aus (41) zu entnehmen ist.

§ 14. *Spezialisierungen.* Ein besonders einfacher Fall ist der $\sigma_2 = 0$, oder, wenn wir hier lieber von den Formeln (49) ausgehen und darin $\vartheta = 0$ setzen, also für die Kurvengleichungen schreiben:

$$y^2 + x^2 - h^2 = 0, \quad z^2 = -\cos\vartheta'(x^2 - h^2) - 2\sin\vartheta' hx = 0,$$

so ist

$$\sigma_{12} = -\sin\vartheta', \quad q = -1, \quad l = \frac{1 + \cos\vartheta'}{\sin\vartheta'} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta',$$

$$k^2 = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\vartheta'}{1 + \operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\vartheta'} = \cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta', \quad k = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta',$$

$$k' = \sin\tfrac{1}{2}\vartheta', \quad \frac{k}{k'} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta',$$

und

$$(53)\qquad \begin{cases} x = h\,\dfrac{-1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u}{1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u}, & y = \dfrac{2h\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta'}\,ja\,u}{1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u},\\[2ex] z = \dfrac{h\sqrt{2\sin\vartheta'}\,ja'u}{1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u}. \end{cases}$$

In den unendlich fernen Punkten ist

$$ja\,u = \sqrt{-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'},$$

$$ja'u = \sqrt{(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta')(1-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta')} = \sqrt{\frac{-2\cos\vartheta'}{\sin\vartheta'}}.$$

Es ist deshalb dort

$$x^2 : y^2 : z^2 = 1 : -1 : -\cos\vartheta',$$

was mit der direkten Berechnung der Punkte aus den Gleichungen (42), (43) übereinstimmt.

Spezialisiert man noch weiter, indem man $\vartheta' = \frac{1}{2}\pi$ setzt, so wird

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad l = 1,$$

$$x = h\,\frac{ja^2u-1}{ja^2u+1},\quad y = \frac{2h\,ja\,u}{ja^2u+1},\quad z = \frac{h\sqrt{2}\sqrt{1-ja^2u}}{ja^2u+1}.$$

Setzt man $\vartheta = \pi$, $\sin\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = -1$, $\sin\vartheta'$ positiv annehmend, so erhält man:

$$(54)\qquad \begin{cases} q = 1,\quad l = \operatorname{tg}\dfrac{\vartheta'}{2},\quad k = \sin\tfrac{1}{2}\vartheta',\quad k' = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta',\\[2ex] x = h\,\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u},\quad y = \dfrac{2h\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta'}\,ja\,u}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u},\\[2ex] z = \dfrac{\sqrt{2\sin\vartheta'}\,ja'u}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta'\,ja^2u}. \end{cases}$$

In den unendlich fernen Punkten ist

$$ja\,u = \sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\vartheta'},\quad ja'u = \sqrt{-2\cos\vartheta' : \sin\vartheta'}.$$

In den unendlich fernen Punkten ist deshalb

$$x^2 : y^2 : z^2 = 1 : 1 : -\cos\vartheta';$$

sie sind reell, wenn ϑ' im zweiten Quadranten liegt, wenn die beiden erzeugenden Flächen Hyperboloide sind.

§ 15. *Nebenbemerkung über Wendepunkte und Geschwisterpunkte.* Die Perioden der Funktion $ja\,u$ und ihrer Ableitung sind:

$$4K,\quad 2K + 2iK'.$$

Die Funktion $\varphi(u) = Ax + By + Cz + D$, wenn A, B, C, D Konstanten sind, wird unendlich groß an den vier Stellen, an denen

$k' - qhja^2u$ verschwindet. Geschieht dies für $u = v$, so geschieht es noch für $u = -v$, $u = v + 2K$, $u = -v - 2K$. Die Summe der Argumentwerte $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, in denen $\varphi(u)$ verschwindet, für die die zugehörigen Punkte in einer Ebene liegen, ist deshalb

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0,$$

und die Argumente der Wendepunkte sind in der Form enthalten:

$$u = \mu K + \nu\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right).$$

Sie sind nur reell, wenn $\nu = 0$ ist; es gibt deshalb vier reelle Wendepunkte. In dem Wendepunkte $u = 0$ ist

$$x = hq, \quad y = 0, \quad z = h\sqrt{2q\sigma_{12} : \sigma_2}.$$

In den Geschwisterpunkten ist $8u \equiv 0$, die Argumente sind in der Form enthalten:

$$\mu\frac{K}{2} + \nu\left(\frac{K}{4} + \frac{iK'}{4}\right).$$

Sie sind nur reell, wenn $\nu = 0$ ist. Es gibt deshalb nur zwei reelle Paare:

$$\frac{K}{2}, \ \frac{7K}{2}; \quad \frac{3K}{2}, \ \frac{5K}{2}.$$

Inhalt.

Seite

Darstellung der Koordinaten der Kurven vom Typus I durch elliptische Funktionen. Formeln (9), § 1 308
Andere Darstellung. Formeln (10), § 2 308
Darstellung der Koordinaten der Kurven vom Typus II. Formeln (32), § 7 314
Andere Darstellung. Formeln (36), § 10. 317
Spezialisierung. Formeln (36a), § 10 317
Darstellung der Koordinaten der Kurven vom Typus III. Formeln (50), § 13 322
Andere Darstellung. Formeln (52), § 13 322
Spezialisierungen. § 14 323

Druckfertig erklärt 1. II. 1909.]

Zur Theorie der trigonometrischen Reihe.

Von

Felix Bernstein.

Der historische Ausgangspunkt der Theorie der Punktmengen ist die Frage nach der Eindeutigkeit der Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe gewesen. Die grundlegende Frage in der Theorie der Eindeutigkeit ist die folgende: Für wieviel Punkte des Fundamentalintervalls muß man die Übereinstimmung der Werte zweier konvergenter trigonometrischer Reihen kennen, um die Identität derselben erschließen zu können.

G. Cantor[1]), welcher zuerst diese Frage aufgeworfen hat, hat zur genaueren Präzisierung dieses „Wieviels" den Begriff der Punktmenge geschaffen. Das weitgehendste von ihm in der Eindeutigkeitsfrage erreichte Resultat[2]) ist das folgende:

Verschwindet eine trigonometrische Reihe (Die Differenz zweier gegebener Reihen) für alle Werte des Fundamentalintervalls $(0 \ldots 2\pi)$ *mit Ausnahme einer abzählbaren, nirgends dichten Punktmenge* L, *in deren Punkten das Verhalten der Reihe unbekannt ist, so verschwindet sie identisch.*

Dies Resultat läßt sich sogleich erweitern. In der Tat zeigte Lebesque im Anschluß an G. Cantor, daß die Glieder der Reihe bel. abnehmen, wenn das Maß von $L \neq 2\pi$ ist, und dies gestattet die Gültigkeit unseres Satzes mindestens bis zu der Grenze auszudehnen, für welche der *Fundamentalsatz der Integralrechnung* resp. *das analoge Theorem für die zweite mittlere Derivierte*, welches H. A. Schwarz zuerst aufgestellt hat, bewiesen ist (s. u.).

Nun haben Scheffer[3]) und Lüroth[4]) die Gültigkeitsgrenzen bei diesen Sätzen dahin ausgedehnt, daß die Menge der Punkte L eine *beliebige abzählbare* Menge sein kann.

1) Journ. f. Math. 71,5 353ff. Journ. f. Math. 72,5 S. 130 und 139.
2) Math. Ann. 5, S. 130. 3) Scheffer. Acta. Math. V.
4) s. h. Dini-Lüroth. Grundlagen usw. 1892. (S. 122 ff.)

In der vorliegenden Arbeit werden nun die *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit des Fundamentalsatzes bzw. des SCHWARZschen Satzes und eines von O. HÖLDER[1]) herrührenden allgemeinen Satzes festgestellt und damit wird das Problem, soweit es mit der allgemeinen Theorie der Funktionen reeller Variablen zusammenhängt, zu *vollständigem* Abschluß gebracht.

Es zeigt sich, daß es notwendig und hinreichend ist, anzunehmen, daß L *keinen perfekten Bestandteil enthält.* Diese Eigenschaft betrifft den Ordnungstypus von L, d. h. sie ist gegenüber allen umkehrbar eindeutigen ordnungstreuen Abbildungen invariant. Nach W. H. YOUNG[2]) hat L das Maß $+2\pi$. Demzufolge wird die gleiche Bedingung *hinreichend* für das Verschwinden der trigonometrischen Reihe.

Ferner wird gezeigt, daß solche Mengen nichtabzählbarer Mächtigkeit wirklich existieren und eine Punktmengengattung eigener Art ausmachen, die den Namen: „*total imperfekten Mengen*" erhalten sollen. Diesen Punktmengen dürfte für den Abschluß auch vieler anderer Fragen in der Theorie der reellen Funktionen eine grundlegende Bedeutung zukommen.

Teil I.

Mengentheoretische Grundlage.

§ 1.

Ein Satz über abzählbare Mengen.

Es sei $(s_{\lambda\mu})$ $(\lambda, \mu = 1, 2 \ldots)$ ein doppelt unendliches System von ganzen positiven Zahlen, das wir zu einfach unendlich vielen Systemen $S_\lambda = (s_{\lambda\mu})(\mu = 1, 2 \ldots)$ zusammenfassen.

Es besteht der Satz

Satz 1. Es läßt sich stets eine Menge T von ganzen Zahlen angeben, welche keine der vorgelegten Mengen S_λ als Teilmenge enthält.

Beweis. Wir nennen die niedersten voneinander verschiedenen Glieder von S_1 a_1 und b_1 und notieren die Tatsache

$$a_1 \neq b_1.$$

Da S_2 abzählbar unendlich sein soll, so gibt es in S_2 stets zwei niederste Elemente, die verschieden von a_1 und b_1 sind. Wir nennen diese a_2 und b_2 und notieren die Beziehung

$$a_1 \neq b_1 \neq a_2 \neq b_2.$$

---

1) Math. Ann. Bd. 24. S. 183.

2) Proc. L. U. S. 2 (1905). Ist L meßbar, so ist sein Maß Null.

Wir definieren ebenso in S_3, S_4, ... allgemein in S_λ die Elemente $a_\lambda + b_\lambda$ als die niedersten von allen früheren verschiedenen Elemente, so daß wir eine Reihe

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2, \ldots, + a_\lambda + b_\lambda$$

voneinander verschiedener Elemente erhalten. Die Menge $T = \{a_\lambda\}$ erfüllt die in Satz 1 aufgestellte Forderung; denn sie enthält aus jeder Menge S_λ wenigstens *ein* Element b_λ nicht. Übrigens enthält auch die in der Menge Z aller ganzen Zahlen zu T komplementäre Menge $\overline{T}$ aus jedem S ein Element a nicht. Es genügt daher $\overline{T}$ derselben Bedingung. Das gleiche gilt von jeder unendlichen Teilmenge von T.

Wir behaupten ferner den

Satz 2. Wenn die zu S_λ komplementären Mengen $\overline{S}_\lambda$ ebenfalls unendlich sind, so kann man T so wählen, daß es überdies in keiner der vorgelegten Mengen S_λ als Bestandteil enthalten ist.

Denn man braucht nur

$$S_\lambda = V_{2\lambda-1},$$

$$\overline{S}_\lambda = V_{2\lambda}$$

zu setzen, und T nach I. bez. des Systems V_λ zu konstruieren. Da wie eben bemerkt dann auch $\overline{T}$ kein V_λ enthält, so enthält z. B. $\overline{T}$ nicht $V_{2\lambda} = \overline{S}_\lambda$, also ist T nicht in S_λ enthalten. Man sieht übrigens, daß auch $\overline{T}$ unendlich ist und der Forderung genügt.

Zusatz. Es ist leicht zu sehen, daß die vorhergehenden Sätze auch bestehen bleiben, wenn die Bedingung der Unendlichkeit der S_λ oder $\overline{S}_\lambda$ für eine endliche Zahl Indizes nicht erfüllt ist.

Man kann leicht ein System S_λ, $\overline{S}_\lambda$ angeben, in dem keine Reihe S_λ, $\overline{S}_\lambda$ in einer andern enthalten ist, z. B. die Vielfachen p der Primzahlen und ihre Komplementärmengen. Aus Satz 2 folgt nun, daß dieses System sich noch stets erweitern läßt. *Weitere fruchtbare, rein logische Schlüsse lassen sich nun offenbar nicht mehr ziehen, da die Voraussetzungen nicht mehr hergeben würden.* Aber wir begehen keinen Fehler, wenn wir denselben logischen Inhalt in der Form der anschaulichen Intuition Cantors dahin aussprechen, *daß es nichtabzählbare Systeme S von Zahlen gibt, von denen keines ein anderes als Bestandteil enthält.*

§ 2.

Verallgemeinerung auf beliebige wohlgeordnete Mengen.

Die Sätze des vorigen Paragraphen lassen sich auf beliebige wohlgeordnete Mengen verallgemeinern. Es beruht dies auf dem folgenden Prinzip:

Prinzip der transfiniten Induktion.[1]) Es sei ein Theorem gültig

1) für $\alpha = \omega$,

und es folge

2) aus der Gültigkeit für alle $\alpha' < \alpha$ die Gültigkeit für α, wo ω die kleinste und α irgend eine transfinite Zahl $\leq \beta$ bezeichnet, so gilt der Satz für alle Zahlen von ω bis β. Würde nämlich der Satz nicht für alle transfiniten Zahlen $\leq \beta$ gelten, so würde es unter denen, für die er nicht gilt, eine kleinste α geben. Infolge 1) muß $\alpha > \omega$ sein und infolge 2) ist der Satz dann für α gültig.

Wir geben nun die sehr einfache Durchführung der Verallgemeinerung. Es sei A ein Abschnitt der Reihe der transfiniten Ordnungszahlen und es sei S_λ ein System von Teilmengen von A, deren jede die Mächtigkeit von A besitze. Ebenso durchlaufe der Index eine Menge der Mächtigkeit von A. Dann formulieren wir den

Satz 3. Es gibt stets Teilmengen T (in der Zahl 2^A) von A, so daß T die Mächtigkeit A von A besitzt und keine der S^λ als Teilmenge enthält.

Beweis. Wir nehmen aus S_1 die niedersten Elemente

$$a_1 + b_1$$

aus S_2 die niedersten Elemente a_2, b_2 heraus, so daß

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2$$

ist, und fahren folgendermaßen fort:

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \ldots + a_{\lambda'} + b_{\lambda'} + \ldots$$

so definiert, daß $a_{\lambda'}$, $b_{\lambda'}$, die niedersten Elemente in $S_{\lambda'}$ seien, die von allen a, b mit niederen Index verschieden seien, dann sollen a_λ und b_λ die *niedersten* Elemente in S_λ sein, welche unter sich und von allen $a_{\lambda'}$, $b_{\lambda'}$, verschieden sind. Wir können das System der S_λ so

1) Mit Hilfe dieses Prinzips hatte ich seinerzeit den Beweis, den G. CANTOR für die Gleichung $\aleph_1^2 = \aleph_1$ gegeben hatte, auf beliebige Aleph übertragen. Beide Beweise sind nicht veröffentlicht worden. S. Diss. § 12. Inzwischen hat JOURDAIN Math. Ann. Bd. 65 dies in gleichem Sinne ausgeführt und veröffentlicht.

anordnen, daß die λ den Anfangstypus der betreffenden Mächtigkeit A durchlaufen, d. h. so, daß alle Zahlen λ' kleiner als ein bel. λ eine Menge von geringerer Mächtigkeit als A definieren. Da dann auch die $a_{\lambda'}$, $b_{\lambda'}$ eine Menge von geringerer Mächtigkeit als A und also als S_λ ausmachen, so gibt es in S_λ stets von allen $a_{\lambda'}$, $b_{\lambda'}$ verschiedene niederste Elemente a_λ, a_λ. Auf diese Weise ist eine Menge $T = \{a_\lambda\}$ für alle λ die dem kleinsten Abschnitt der Reihe der Ordnungszahlen von der Mächtigkeit $\overline{\overline{A}}$ angehören, definiert und diese ist die verlangte Menge. Denn enthielte T ein S_λ so würde es b_λ enthalten müssen, was ausgeschlossen ist. Übrigens genügt denselben Anforderungen auch jede Teilmenge von T, die gleiche Mächtigkeit A hat. Diese sind also schon 2^A Lösungen. Das gleiche gilt wieder von der Komplementärmenge T. Übrigens kann man A sehr leicht in weitere Bestandteile zerlegen, deren *keiner* ein S_λ enthält.

Leicht ist die Bemerkung, daß auch jede Teilmenge von A, die mit A gleiche Mächtigkeit besitzt, an Stelle von A treten kann. In der Tat können an Stelle der Zahlen in A auch irgend welche unter sich verschiedenen Elemente gleicher Zahl, also auch Zahlen einer Teilmenge treten, ohne daß die Beweise eine Änderung erfahren.

Bedenkt man nun, daß jede Teilmenge in zwei Bestandteile zerfällt, deren keiner ein S_λ enthält und zieht in Rücksicht, daß sich die wohlgeordnete Menge A (mittels diagonaler Ordnung von A^2) in $\overline{A}$ Bestandteile spalten läßt, die sämtlich die Mächtigkeit A haben, so folgt der

Satz 4. Es läßt sich eine wohlgeordnete Menge A in jede Zahl $2 = \nu \leqq \overline{A}$ Bestandteile spalten, deren jeder keiner ein S_λ enthält.

§ 3.

Die total imperfekten Mengen.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 5. Das Kontinuum besitzt nichtabzählbare Teilmengen, welche keinen perfekten Bestandteil enthalten.

Beweis. Gesetzt der Satz wäre falsch und es enthielte jede nichtabzählbare Teilmenge des Kontinuum einen perfekten Bestandteil d. h. einen Bestandteil von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuum, so wäre jede nichtabzählbare Teilmenge selbst von dieser Mächtigkeit. Es ist nun nachgewiesen worden,[1]) daß das Kontinuum einen Bestandteil

1) Diss. Untersuchungen a. d. Mengenlehre. Halle 1901. u. Math. Ann. Bd. 60. § 6 Satz 1.

von der Mächtigkeit $\aleph_1$ enthält. Also ist infolge unserer Annahme $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Danach könnte das Kontinuum wohlgeordnet werden, und die Sätze des vorigen Paragraphen finden Anwendung. Die perfekten Mengen bilden nun eine Gesamtheit, die wie nachgewiesen worden ist[1]) als solche die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Folglich gibt es im Widerspruch mit unserer Annahme nach *Satz 3* eine Teilmenge, welche keinen perfekten Bestandteil enthält. Es gibt also entgegengesetzt unserer Annahme stets Mengen, die nichtabzählbare sind und keinen perfekten Bestandteil enthalten. Wir wollen solche Mengen *total imperfekt* nennen. In einfacher Weise entspringt hieraus die *Folgerung*: *Es gibt im Kontinuum nicht meßbare Mengen.* Diese Tatsache ist schon mehrfach auf speziellere Art bewiesen worden.[2])

Nimmt man an, daß das Kontinuum wohlgeordnet werden könne, so haben auch die übrigen Sätze des vorigen Paragraphen Anwendung, welche die Teilung des Kontinuum in total imperfekte Mengen betreffen würden.

Möglicherweise liefert die geistreiche Methode des Herrn *Van Vleck* den Beweis spezieller Sätze dieser Art unter geringeren Annahmen.

§ 4.

Über Existenz und Herstellung eines Dinges.

Die Methode des vorigen Paragraphen liefert den Beweis der Existenz der total imperfekten Menge, jedoch nicht die Herstellung eines einzelnen von allen andern wohlunterschiedenen Exemplars. Diese Tatsache stellt uns vor die Frage, ob der fragliche Umstand in der Mangelhaftigkeit der Methode oder in der Sache begründet liegt. Dieselbe Erscheinung ist schon einmal von mir behandelt worden[3]) und ich habe darauf hingewiesen, daß es sich offenbar hier um eine *notwendige* Unbestimmtheit handele, deren Mindestmaß ich die *Vielwertigkeit* der betreffenden Lösung nannte. Ob man nun den Begriff der *Existenz* auf einwertig definierte Objekte einschränkt, oder auf vielwertig definierte ausdehnt, ist eine Frage des Sprachgebrauchs. Ich hatte ursprünglich das erstere getan, will aber künftig alle einwertig oder vielwertig definierten Objekte als existierend bezeichnen, dagegen die Frage nach einwertiger Definition als Frage nach der *Herstellung* des Objekts bezeichnen. Die Benennung ist Sache der Konvention, dagegen ist die Tatsachenfrage,

1) Diss. Drittes Kapitel. 2) s. *Van Vleck*.

3) Bemerkung zur Mengenlehre. Gött. Nachr. 1904. H. 6.

ob es möglich ist eine einzelne total imperfekte Menge zu konstruieren oder nicht, eine inhaltreiche und wesentliche.

Ich werde nun durch ein Beispiel zeigen, daß es Fälle gibt, wo man den Beweis erbringen kann, daß eine *einwertige Herstellung mit vorgegebenen Mitteln nicht möglich ist.* Wir definieren nämlich eine Menge kurz gesagt so, daß die Definition für alle Elemente *homogen* ausfällt. Es handelt sich um den Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ der Menge der ganzen negativen und positiven Zahlen, den wir durch folgende Forderungen festlegen

1. Die Menge sei einfach geordnet, d. h. es sei stets $a \prec b$ oder $b \succ a$ und aus $a \prec b$ und $b \prec c$ folge $a \prec c$.

2. Es gebe kein niederstes und kein höchstes Element.

3. Jede Teilmenge, welche den Forderungen 1. und 2. genügt, sei der ganzen Menge ähnlich. Übrigens lassen sich 2. und 3. auch ersetzen durch die Forderungen

3 a. Jedes Element a habe einen Vorgänger a' und einen Nachfolger $\bar{a}$ und

3 b. Keine Teilmenge T besitze die Eigenschaften 1. bis 3. in dem Sinne, daß a' und $\bar{a}$ zugleich mit a stets zu T gehören.

Daß diese Definitionen keinen Widerspruch bedingen, zeigt der Umstand, daß der Typus $\omega^* + \omega$ denselben genügt. Im übrigen aber sind sie völlig *homogen* hinsichtlich aller Elemente. Wird also bewiesen, daß ein Element a *auf Grund dieser Axiome* eine Eigenschaft A bezitzt, so muß sie auch jedem andern Elemente b zukommen. Es ist daher mit den vorgegebenen Mitteln nicht möglich, ein einzelnes von allen andern wohlunterschiedenes zu bezeichnen.

Analog mag der Fall bei der Definition einer total imperfekten Menge hinsichtlich der durch die Axiome über reelle Zahlen gegebenen Mittel notwendigerweise liegen, was festzustellen, wir künftigen Untersuchungen überlassen müssen.

Teil II.

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung.

§ 5.

Die Hauptsätze.

Hauptsatz I. Es möge $\varphi'(x)$ die Ableitung einer eindeutigen stetigen einmal differentiierbaren Funktion des Intervalles 0 *bis* 1 *bedeuten. Ist dann die Gleichung*

$$\varphi'(x) = 0 \tag{1}$$

für alle x der Komplementärmenge M einer total imperfekten Menge L erfüllt, so folgt

$$\varphi(x) = \text{const.}$$

Hauptsatz II. Ist die Gleichung

$$(2) \qquad \lim_{\alpha = 0} \frac{\varphi(x+\alpha) + \varphi(x-\alpha) - 2\varphi(x)}{\alpha^2} = 0$$

für alle x einer wie oben definierten Menge M, und die Gleichung

$$(3) \qquad \lim_{\alpha = 0} \frac{\varphi(x+\alpha) + \varphi(x-\alpha) - 2\varphi(x)}{\alpha} = 0$$

für alle x erfüllt, so ist $\varphi(x)$ eine lineare Funktion. Die gegebene hinreichende Bedingung ist nicht durch eine reduziertere Annahme über die Menge M zu ersetzen, falls die andern Annahmen ungeändert bleiben, sie ist in diesem Sinne eine notwendige.[1])

Beide Sätze gelten in verallgemeinerter Form, wenn die Gleichungen (1) und (2) nur für die verallgemeinerten Derivierten erster oder zweiter Ordnung einer lediglich stetigen Funktion vorausgesetzt werden. Die Bedingung (3) kann durch die allgemeinere Bedingung ersetzt werden, *daß die Kurve an keiner Stelle innerhalb einer konvexen resp. konkaven Ecke liegen soll.* Es wird später erörtert, inwieweit diese Bedingung notwendig ist.

§ 6.

Die Transformation auf monotone Funktionen.

Die Beweise der Sätze des vorigen Paragraphen beruhen auf der Beziehung einer allgemeinen stetigen Funktion zu einer monotonen stetigen Funktion, welche durch die folgende Transformation vermittelt wird.

Erste Transformation. Zu jeder eindeutigen stetigen Funktion $\varphi(x)$ im Intervall 0 bis 1 gehört eine monotone nicht abnehmende stetige Funktion $\bar{\varphi}(x)$, welche mit ihr in der Beziehung steht, daß

$$\bar{\varphi}(x) \gtreqless \varphi(x) \text{ an allen Konstanzstellen von } \bar{\varphi}(x)$$

und

$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$ an allen Inkonstanzstellen von $\bar{\varphi}(x)$, sowie an deren Grenzstellen und für $x = 1$ ist.

1) Sie ist damit zugleich eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Bestimmung einer trigonometrischen Reihe, deren Werte für die Punkte der Menge M gegeben sind. Notwendig ist sie aber dann nur insoweit, als sie durch keine eingeschränktere Annahme über den *Ordnungstypus* von M ersetzt werden kann,

Wächst $\varphi(x)$ im Intervall, so ist infolge $\bar{\varphi}(1) = \varphi(1)$, $\bar{\varphi}(0) \lesseqgtr \varphi(0)$ zugleich $\bar{\varphi}(1) > \bar{\varphi}(0)$ und daher $\bar{\varphi}(x)$ keine Konstante; es stimmen dann $\varphi(x)$ und $\bar{\varphi}(x)$ an einer *perfekten* Menge von Stellen überein.

Man ziehe zum Beweis von jedem Punkt der Kurve $C(y = \varphi(x))$ eine horizontale Strecke nach links bis zur Geraden $x = 0$. Diese Strecken erfüllen ein Gebiet, das nach unten von einer Kurve $\bar{C}$ begrenzt ist, die stetig ist, d. h. keine vertikale Strecke besitzt, wenn dies bei C nicht der Fall ist. Die Ordinaten von $\bar{C}$ sind die untern Grenzen der rechts gelegenen Ordinaten von C, also auch von $\bar{C}$. D. h. $\bar{C}(y = \bar{\varphi}(x))$ ist mononton.

Ferner ist jede Ordinate von $\bar{\varphi}(x)$ entweder identisch mit einer an gleicher Stelle oder rechts gelegenen Ordinate von $\varphi(x)$. Im letzteren Falle ist $\bar{\varphi}(x)$ auch dem zwischen befindlichen Intervall konstant. Ist aber x Inkonstanzstelle von $\bar{\varphi}(x)$, so ist dies ausgeschlossen und $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Infolge der Stetigkeit von $\bar{\varphi}(x)$ und $\varphi(x)$ gilt die Gleichung auch für die Grenzstellen der Inkonstanzstellen. Im übrigen ist $\bar{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$.

Für eine stetige monotone Funktion besteht folgender bekannte Hilfssatz.

Hilfssatz I. Eine stetige monotone Funktion $\bar{\varphi}(x)$, die im Intervall 0 bis 1 wächst, besitzt eine perfekte Menge P von Stellen, an denen sie wächst.

Denn die Kurve $\bar{C}$ projiziert sich auf die y Achse in die von Null verschiedene Strecke $\overline{\bar{\varphi}(1), \bar{\varphi}(0)}$.

Wird der rechte Endpunkt einer Konstanzstrecke auf $\bar{C}$ der Projektion zugeordnet, so ist dieselbe eindeutig umkehrbar und der Variablen y, die von $\bar{\varphi}(0)$ bis $\bar{\varphi}(1)$ läuft, entspricht eindeutig ein $\varphi(x)$ und also eine dem Kontinuum ähnliche d. h. in sich perfekte Menge[1]) der x von verlängerter Eigenschaft.

1) *„in sich“ perfekt = ordinal perfekt = ordinally perfekt* (*W. H. Joung.* The theory of sets of points Cambridge 1906) bedeutet: *„von perfektem Ordnungstypus“*. Die gewöhnlichen perfekten Mengen, die wir *„äußerlich“ perfekt* nennen wollen, unterscheiden sich von den ersteren durch einen abzählbaren Bestandteil, dessen Hinzutreten durch die *äußere* Lage im Gesamtkontinuum bedingt wird. Jede in sich p. Menge enthält „äußerlich“ p. Mengen und vice versa. Obgleich *nur* die ersteren systematische Bedeutung haben, kann man doch infolge dieses Umstandes in fast allen Theoremen die Unterscheidung „in sich“ und „äußerlich“ perfekter Mengen vernachlässigen.

Hieraus folgt sofort der

Hilfssatz II. Wächst die stetige Funktion $\varphi(x)$ im Intervall o bis 1, so gibt es eine perfekte Menge von Stellen, wo sie wächst.

Denn die zugehörige monotone Funktion $\bar{\varphi}(x)$ ist infolge $\varphi(1) = \bar{\varphi}(1)$ und $\bar{\varphi}(0) \leq \varphi(0)$ ebenfalls wachsend. An ihren nach Hilfssatz 1 in perfekter Menge T vorhandenen Wachstumstellen x_0 ist $\bar{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0)$. Für alle Stellen $x > x_0$ ist $\bar{\varphi}(x) > \bar{\varphi}(x_0)$ und zufolge $\bar{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0)$ und $\varphi(x) \geq \bar{\varphi}(x)$ ist also $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ d. h. $\varphi(x)$ wächst an der Stelle x_0 mindestens so stark als die zugehörige monotone Funktion.

Endlich folgt

Hilfssatz III. Wächst die stetige Kurve C im Intervall o bis 1 um $p > 0$, so gibt es eine perfekte Menge von Stellen, an denen das Wachstum nicht weniger als $p - \varepsilon$ beträgt, wie klein auch ε gewählt sei.

Bezieht man das Wachstum statt auf den Parallelen zur x Achse, auf die Geraden parallel zu $y = (p-\varepsilon)x$, so wächst die Kurve C um ε an einer perfekten Menge von Stellen nach dem vorigen Satze d. h. sie liegt für alle folgenden Stellen oberhalb der Parallelen zu $y = (p-\varepsilon)x$. Sie hat dort, auf die alten Achsen bezogen, ein Wachstum größer gleich $p-\varepsilon$.

Durch Vergrößerung des Intervalls und durch Vertauschung des Sinnes bei der Transformation lassen sich die vorstehenden Hilfssätze leicht in eine allgemeine Form setzen. Dies geschieht besonders elegant durch Einführung der vier allgemeinen Derivierten $D^+ D_+ D^- D_-$ einer beliebigen stetigen Funktion. Die obigen Sätze führen zunächst auf folgenden

Hilfssatz IV. Besitzt eine eindeutige stetige Funktion $\varphi(x)$ in einem Intervall $a \dots b$ einen Differenzenquotienten $p > 0$, so gibt es eine perfekte Menge von Stellen, an denen

$$D_+ \varphi(x) \geq p - \varepsilon$$

ist, wie klein auch ε sei.

Genau der gleiche Satz gilt auch für $D_- \varphi(x)$.

Analog erhält man ihre Grenzen für $D^+ \varphi(x)$ und $D^- \varphi(x)$. Bedenkt man noch, daß in beliebiger Nähe jedes Differentialquotients ein Differenzenquotient infolge der Definition des ersteren liegt, daher der Wertbereich der Differenzenquotienten immer dabei innerhalb des Wertbereichs der Differentialquotienten liegen muß, so kann man alle diese Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Theorem 1. Seien L und l der untere und der obere Limes der Differentialquotienten in dem Intervall $a \ldots b$; dann durchläuft jeder der vier Differenzenquotienten denselben Wertbereich und es lassen sich für jeden Differentialquotienten stets perfekte Mengen angeben, auf denen derselbe von L oder l beliebig wenig abweicht.

Dieser Satz umfaßt den Satz 1. Ist in der Tat auf jeder perfekten Menge wenigstens ein Punkt, in dem etwa $D_+ \varphi(x)$ verschwindet, so muß $L = l = 0$ sein. Wäre nun $\varphi(x)$ nicht konstant, so wäre ein Differenzenquotient und damit L oder l verschieden von Null.

§ 7.

Die Transformation auf konvexe Funktionen.

Das zweite Theorem des § 6 wird durch eine Beziehung einer stetigen Funktion zu einer konvexen Funktion vermittelt, welche mit der ersten Transformation der Ableitung der stetigen Funktion dann identisch ist, wenn *diese eine Ableitung besitzt.* Es ist aber eine charakteristische Eigenschaft vieler, namentlich der LIEschen Theorie entstammender Funktional-Transformationen, daß sich ihr Existenzbereich weiter ausdehnen läßt, als der Bereich innerhalb dessen sie zu andern Funktional-Transformationen in analytisch einfacher Beziehung stehen.

Zweite Transformation. Zu jeder eindeutigen stetigen Funktion $\varphi(x)$, welche für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet und für ein $x = x_1$ negativ ist, gehört eine größte konvexe Funktion $\breve{\varphi}(x)$, so daß

$$\breve{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$$

an allen Stellen wo $y = \breve{\varphi}(x)$ gradlinig ist, und

$$\breve{\varphi}(x) = \varphi(x)$$

an allen andern Stellen (und deren Grenzstellen.)

Die konvexe Kurve $\breve{C}$ ist analytisch der Ort der Minima von $\varphi(x) - cx$ bei variablem c. Sie begrenzt, geometrisch definiert, das Gebiet, das die Verbindungsstrecken irgend zweier Punkte von C überdecken. Die Kurve $\breve{C}$ kann überall dicht *Ecken* besitzen.

Besitzt $\breve{C}$ eine Ecke, so liegt an dieser Stelle C innerhalb der beiden Tangenten der Ecke, also innerhalb eines konkaven Winkels. Wir wollen eine solche Stelle, wo eine stetige Kurve C innerhalb eines konkaven Winkels liegt, allgemein eine Ecke von C nennen, und bemerken, daß dann die den 4 Ableitungen entsprechenden Halbstrahlen sämtlich innerhalb der Ecke liegen müssen.

Besitzt C keine Ecken, so besitzt auch $\frown{C}$ keine Ecke. Die analytische Definition der Ecke lautet offenbar

$$D^{-}\varphi(x) < D_{+}\varphi(x) \text{ oder } D^{+}\varphi(x) < D^{-}\varphi(x).$$

Zieht man aus der für alle x als gültig angenommenen Gleichung

$$(3) \qquad \lim_{\alpha=0} \varphi \frac{(x+\delta)+\varphi(x-\delta)-2\varphi(x)}{\delta} = 0$$

die beiden Folgerungen

$$\lim_{\text{sup.}} \frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} = \lim_{\text{sup.}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}$$

und

$$\lim_{\text{inf.}} \frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} = \lim_{\text{inf.}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}$$

d. h.

$$D^{+}\varphi(x) = D^{-}\varphi(x)$$

und

$$D_{+}\varphi(x) = D_{-}\varphi(x)$$

so erkennt man aus dem Umstande, daß die vier Halbstrahlen hier zwei Graden bilden, daß die Gleichung (3) eine hinreichende Bedingung für den Anschluß von Ecken bildet.

Eine eckenfreie konvexe Kurve $\breve{C}$ besitzt als Ableitung eine monotone wachsende stetige Kurve $\bar{C}$, auf welche unsere früheren Sätze Anwendung finden.

$\bar{C}$ ist nicht gradlinig, da der Differenzenquotient im Intervall die verschiedenen Werte $\frac{\varphi x_1}{x_1} < 0$ und $-\frac{\varphi(x_1)}{1-x_1} > 0$ annimmt. Es gibt daher eine perfekte Menge von Stellen, wo C stärker wächst und abnimmt als eine Grade von fester Neigung $p > 0$. An diesen Stellen liegt $\breve{C}$ oberhalb einer Parabel $y - y_0 = p(x - x_0)^2$, wenn y_0, x_0 den Kurvenpunkt bedeutet.

Ebenso liegt auch C oberhalb dieser Parabeln, und wir erhalten den

Hilfssatz 1. Nimmt eine stetige eckenlose Kurve, welche für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, im Intervall einen negativen Wert an, so gibt es eine perfekte Menge P von Stellen, an denen sie oberhalb einer Parabel mit positiver Krümmung liegt. Es ist in P offenbar

$$\lim_{\text{inf.}} \frac{\varphi(x+\alpha)+\varphi(x-\alpha)-2\varphi(x)}{\alpha^2} > p$$

wo p eine Größe > 0 bedeutet.

Ebenso folgt wie im vorigen Paragraphen

Hilfssatz 2. Bedeutet G einen zweiten mittleren Differenzenquotienten, so läßt sich stets eine perfekte Menge von Stellen im Intervall bestimmen, an denen ein Limes desselben größer als $G - \varepsilon$ ist, wie klein auch ε sei.

Allgemein folgt endlich, wie früher

Theorem II. Sind L und l die beiden Grenzen der zweiten mittleren Differenzenquotienten einer *eckenlosen* stetigen eindeutigen Kurve $\varphi(x)$ des Intervalles $a \ldots b$, so liegen die zweiten verallgemeinerten Differentialquotienten zwischen denselben Grenzen und approximieren diese *gleichmäßig auf perfekten Mengen.*

Dies Theorem enthält den Satz II wie früher das Theorem I den Satz I. Es ist eine Verallgemeinerung eines von O. Hölder zuerst aufgestellten Satzes (vgl. Einl.)

Daß die Bedingung der Eckenlosigkeit übrigens notwendig ist, zeigt das in folgendem konstruierte Beispiel einer Funktion, die eine abzählbare Menge von Ecken besitzt, und deren zweite mittlere Derivierte an allen anderen Stellen Null ist.

Es bedeute (s) eine abzählbare Menge von Stellen des Intervalles, es seien $d_s > 0$ solche Größen, daß $\Sigma d s$ endlich ausfällt. Setzen wir

$$\Phi_s(x) = 0 \text{ für } x < s$$

und

$$\Phi_s(x) = d_s(x - s) \text{ für } x \geq s$$

so ist

$$\Phi(x) = \sum_s \Phi_s(x)$$

infolge

$$\Phi(x) = \sum_{s' > x} \Phi_{s'}(x) = \sum d_{s'}(x - s') < x \sum d_{s'} < x d$$

eine endliche, überdies konvexe Funktion, welche das Integral der monoton wachsenden mit Sprüngen behafteten Funktion $\varphi(x)$ ist, die durch die Definitionsgleichungen

$$\varphi(x) = \sum_s \varphi_s(x),$$

$$\varphi(x) = 0 \text{ für } x < s$$

$$\varphi(x) = d_s \text{ für } x \geq s$$

gegeben ist. Die Funktion $\Phi(x)$ besitzt überall mit Ausnahme der Stellen s einen konstanten ersten und verschwindenden zweiten Differentialquotienten, ohne identisch zu verschwinden. Das Ver-

schwinden des gewöhnlichen zweiten Differentialquotienten zieht das der mittleren infolge der Stetigkeit von $\varphi(x)$ an den betrachteten Stellen ohne weiteres nach sich, so daß die Behauptung erwiesen ist. Man sieht hier deutlich, wie der Umstand, daß die stetigen Funktionen Integrale unstetiger sein können, die stetigen Lösungen der Gleichung $\Phi''(x)$ gegenüber den stetigen Lösungen von $\varphi'(x) = 0$ bei Zulassung von Ausnahmepunkten bereichert.

Es sei dahingestellt, ob der Fundamentalsatz auch auf unstetige Funktionen sich ausdehnen läßt, wenn man die Forderung hinzufügt, daß die Zahl der Sprünge abzählbar sein soll und daß richtig gebildete Summe derselben in keinem Intervall dem Zuwachs der Funktion gleich ist. Analog würde man auch bei dem zweiten Theorem Ecken zulassen, wenn nur in jedem Intervall die richtig gebildete Gesamtdrehung nicht von den Drehungen in den Ecken allein herrührt. Sind alle Sprünge oder Drehungen positiv, so folgt diese Erweiterung ohne jede Schwierigkeit aus dem Vorstehenden.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 325

Teil I.

Mengentheoretische Grundlage 326

§ 1. Ein Satz über abzählbare Mengen 326

§ 2. Verallgemeinerung auf beliebige wohlgeordnete Mengen . 328

§ 3. Die total imperfekten Mengen 329

§ 4. Über Existenz und Herstellung eines Dinges 330

Teil II.

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung . . 331

§ 5. Die Hauptsätze 331

§ 6. Die Transformation auf monotone Funktionen 332

§ 7. Die Transformation auf konvexe Funktionen. Die Notwendigkeit des Ausschlusses der Ecken 335

Druckfertig erklärt 10. II. 1909.]

INHALT.

Seite

Heinrich Liebmann, Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelenpostulat, verbunden mit neuer Begründung der hyperbolischen Geometrie. Mit 6 Figuren im Text 289

J. Thomae, Parameterdarstellung der Raumkurven vierter Ordnung 306

Felix Bernstein, Zur Theorie der trigonometrischen Reihe . . . 325

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

VIII

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1908.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pf.

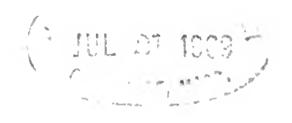
GUSTAV ZEUNER

NEKROLOG

VORGELEGT IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1908

VON

MARTIN KRAUSE



Am 17. Oktober vorigen Jahres starb der langjährige Direktor und Professor an der technischen Hochschule zu Dresden GUSTAV ZEUNER.

Geboren in Chemnitz am 30. November 1828 gewann er in seiner gewerbefleißigen Vaterstadt schon frühe Interesse für technisches Wissen und Können. Seine Vorbildung erhielt er an der Chemnitzer Gewerbeschule und widmete sich sodann in den Jahren 1848 bis 1851 an der Bergakademie zu Freiberg dem Studium des Berg- und Hüttenwesens. Nach seiner Studienzeit war ZEUNER vorübergehend in Freiberg und Chemnitz als Lehrer der Mechanik tätig und nahm an den Arbeiten seines Lehrers WEISBACH vor allem an dessen bahnbrechenden hydraulischen Experimenten lebhaften Anteil. Im Jahre 1852 führte ihn eine Studienreise durch Deutschland, Belgien und Frankreich und brachte ihn in persönliche Beziehung mit PONCELET, REGNAULT und COMBES. Im Jahre 1853 promovierte ZEUNER an der Universität Leipzig und gründete unter Mitarbeiterschaft von WEISBACH und BORNEMANN die technische Zeitschrift „Civilingenieur“, in welcher er auch nach Niederlegung der Redaktion im Jahre 1857 die weitaus größte Zahl seiner Abhandlungen veröffentlichte. Bei Begründung des eidgenössischen Polytechnikums im Jahre 1855 wurde er als Professor der technischen Mechanik und technischen Maschinenlehre nach Zürich berufen und fand hier einen ersten ihn völlig erfüllenden Wirkungskreis.

Die 16 Jahre, die ZEUNER in Zürich zubrachte, sind die fruchtbarsten und folgenschwersten in seinem Leben gewesen. In Zürich entwickelte sich sein hervorragendes Lehrtalent, so daß er sehr bald zu den gefeiertsten Dozenten der jungen Hochschule gehörte, in Zürich schrieb er neben einer größeren Anzahl von Abhandlungen drei wissenschaftliche Werke, die

seinen Namen in die weitesten technischen Kreise trugen, in Zürich erhielt er diejenigen großzügigen Anschauungen über die Aufgaben und Ziele einer technischen Hochschule, die er bei seiner späteren langjährigen Verwaltungstätigkeit an der Dresdener Hochschule zu verwirklichen strebte.

Das Züricher Polytechnikum war von vornherein auf einer breiteren Grundlage aufgebaut, als die überwiegende Mehrzahl der deutschen Schwesteranstalten. Die maßgebenden schweizerischen Kreise waren der Ansicht, daß der rein wissenschaftlichen und allgemein menschlichen Bildung ein breiter Raum gewährt werden müsse, um die Geisteskräfte der Zöglinge möglichst harmonisch zu entwickeln. Ferner war man der Ansicht, daß den Lehrern technischer Unterrichtsanstalten Gelegenheit zur Ausbildung geboten werden müsse. Unter solchen Umständen wurde eine besondere Abteilung gegründet, an welcher die naturwissenschaftlichen und mathematischen Disziplinen in ihrem ganzen Umfange und auf höchster Höhe vorgetragen werden sollten, an welcher ferner die Literaturen der wichtigsten lebenden Sprachen, politische und Kunstgeschichte, Nationalökonomie und einzelne Teile des Privatrechtes und der administrativen Gesetzgebung gelehrt werden sollten. Später und zwar unter dem Direktorate und unter der Mitwirkung von ZEUNER wurde dieser Abteilung ganz allgemein die Bildung von Fachleuten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Richtung übertragen. Eine Anzahl bedeutender Männer wie DEDEKIND, CHRISTOFFEL, CLAUSIUS, KUNDT u. a. brachten dieselbe zu entschiedener Blüte. Hierbei zeigte sich ein harmonisches und glückliches Zusammenarbeiten mit den eigentlichen Fachabteilungen, an denen eine große Anzahl hervorragender Professoren, wie GOTTFRIED SEMPER, CULMANN, REULEAUX u. a. mit größtem Erfolge tätig waren. ZEUNER nahm an dieser Entwicklung mit regstem Interesse und in engster Fühlung mit den maßgebenden Kreisen tätigen Anteil und erlebte es, wie bei dieser großzügigen Auffassung die junge Hochschule einen glänzenden Aufschwung nahm. Verschiedene Rufe nach Karlsruhe, Wien, München und Aachen konnten ihn unter solchen Umständen seinem lieb gewordenen

Lehrstuhle nicht entreißen. Als aber im Jahre 1871 die von den Deutschen in Zürich veranstaltete Feier der Reichsgründung in gröblicher Weise gestört wurde und auch unter den Deutschen sich Uneinigkeit zeigte, ergriff ZEUNER die erste Gelegenheit, die sich ihm bot, um nach Deutschland zurückzukehren und übernahm im Jahre 1871 die Leitung der Freiberger Bergakademie mit der ausgesprochenen Aufgabe, dieselbe zeitgemäß umzugestalten. Seine Tätigkeit war hier nur eine kurze. Schon nach ein und einem halben Jahre wurde er als ständiger Direktor und Professor der Mechanik und Maschinenlehre an das Dresdner Polytechnikum berufen. Um jedoch der ihm in Freiberg gestellten Aufgabe gerecht zu werden, behielt ZEUNER seine dortige Stellung gleichzeitig mit dem neuen Amte bis zum Jahre 1875 bei. Wie einschneidend und erfolgreich seine kurze Tätigkeit für die Freiberger Akademie und damit auch für die Stadt Freiberg geworden ist, das zeigten die Dankesworte, die die Vertreter der Akademie und der Stadt ihm, dem Ehrenbürger der letzteren an seinem Sarge widmeten.

In Dresden wurde seine Kraft durch die Direktoratsgeschäfte sehr in Anspruch genommen, so daß seine literarischen Arbeiten zunächst etwas zurücktraten. Bei seiner Ankunft war das Polytechnikum eben erst zu dem Range einer Hochschule erhoben worden, jetzt galt es der neuen Form entsprechenden Inhalt zu geben, um die Hochschule fähig zu erhalten, den hochgesteigerten Anforderungen der Neuzeit gerecht zu werden. ZEUNER hat sich mit größter Hingebung und Tatkraft dieser verantwortungsreichen Aufgabe gewidmet und sich hierbei als ein hochstehender und weitblickender energischer Mann gezeigt, der die reichen Erfahrungen, die er an der Züricher Hochschule gemacht hatte, für sein Vaterland zu verwerten strebte. Seine Forderungen für die Fortentwicklung der Anstalt legte er kurz im Programm für das Studienjahr 1875/1876 nieder. Neben der Einrichtung einer Hochbauabteilung forderte er: „Einfügung weiterer Lehrzweige in die bereits bestehenden Abteilungen zur Ausbildung von Mechanikern, Ingenieuren, Chemikern, von Lehrern der reinen und angewandten Mathematik, der Physik und Chemie, eine

Erweiterung des gesamten Lehrplanes durch Vermehrung der humanistischen Fächer an der allgemeinen wissenschaftlichen Abteilung, Aufnahme eines entsprechenden Teiles der Wirtschafts- und Verwaltungswissenschaften, eines weiteren, für den Techniker wichtigen Teiles aus dem großen Gebiete der allgemeinen Rechtskunde u. s. f."

ZEUNER konnte bei den Forderungen, die sich auf die Ausbildung der allgemeinen Abteilung bezogen, an Traditionen anknüpfen, wie sie in den maßgebenden Kreisen Sachsens seit Gründung der Anstalt vorhanden waren, ohne daß sie aber zu so geschlossenen Gestaltungen geführt hatten, wie es in der Schweiz der Fall war. Jedenfalls gelang es ihm neben der Gründung einer Anzahl technischer Professuren die Gründung von Professuren für die Fächer der Geographie, der Geschichte, der Botanik, der Philosophie und der Nationalökonomie durchzusetzen und ein Staatsexamen für Kandidaten des höheren Lehramtes einzuführen, welches dem an der Universität bestehenden in Bezug auf die in Betracht kommenden Fächer gleichgestellt wurde.

ZEUNER hat auf diese Neugestaltungen stets großes Gewicht gelegt und sie als einen wichtigen Teil seiner Lebensaufgabe angesehen. Der Erfolg, den die ersten Jahre brachten, war freilich nicht gleichmäßig andauernd. Die Verhältnisse lagen im deutschen Vaterlande doch anders wie in der Schweizer Republik, vor allem nahmen die deutschen Universitäten gegenüber den technischen Hochschulen in Bezug auf die Lehrerbildung eine durchaus beherrschende Stellung ein. Daneben aber hatten sich die Ziele und Aufgaben des technischen Studiums erweitert und wurde die Gründung von Professuren nicht rein technischen Charakters in Ingenieurkreisen vielfach als ein Hemmnis für die eigentlichen Zwecke der Hochschule angesehen. Da hat es an Schwierigkeiten nicht gefehlt, die ZEUNER zeitweise schwer empfunden hat. Um so mehr mußte es ihn erfreuen, daß am Ende seines Lebens die Anschauungen, die er über das Wesen und die Aufgaben der technischen Hochschule hatte, in immer weitere und weitere Kreise unseres Volkes drangen und insbesondere der mächtige über ganz

Deutschland verbreitete Verein deutscher Ingenieure sich in einer Reihe von Thesen zu ihnen bekannte.

Ostern 1890 erbat und erhielt Zeuner seine Entlassung als ständiger Direktor des Polytechnikums, um die Einführung des Wahlrektorates zu ermöglichen, nachdem er vorher noch alle vorbereitenden Schritte, insbesondere die Abfassung des neuen Statutes der nunmehrigen „Technischen Hochschule" auf sich genommen hatte. Er widmete sich fortan ausschließlich der Lehrtätigkeit in seinem Fache und trat dann mit Ende des Sommersemesters 1897 in den Ruhestand. Derselbe gab ihm die lange ersehnte Muße seine wissenschaftlichen Untersuchungen in erhöhtem Maße wieder aufzunehmen. Neben reichen Ergänzungen seiner früheren Schriften in neuen Auflagen nahm ihn vor allem die Abfassung der Turbinentheorie in Anspruch, die im Jahre 1899 erschien und sich im wesentlichen auf die Untersuchungen stützte, die er in Zürich über diesen Gegenstand angestellt hatte. Allmählich aber versagten seine Kräfte. Während der letzten Auflage der Thermodynamik sank seine bis dahin unermüdliche Arbeitstätigkeit und stellten sich immer mehr und mehr die Beschwerden des Alters ein. Trotz der hingebendsten und aufopferndsten Pflege, die er seit dem Tode seiner treuen Lebensgefährtin im Hause seiner Tochter, der Frau Geheimen Hofrat Helm, gefunden hatte, schwand der Rest seiner körperlichen und geistigen Kräfte fast stetig, bis am 17. Oktober v. J. das reiche Leben seinen schmerzlichen Abschluß fand.

In den vorangehenden Worten habe ich versucht, das äußere Leben Zeuners unter Hinzunahme seiner Verwaltungstätigkeit kurz darzustellen. In den angegebenen Rahmen fallen nun die glänzenden Erfolge, die er als akademischer Lehrer und als Forscher gehabt hat.

Er war Lehrer im Grunde seiner Seele. „Zeuner, so schreibt einer seiner besten Schüler in der Schweizerischen Bauzeitung, war der geborene Professor. Mit unübertrefflicher Klarheit und Anschaulichkeit wußte er in schlichtem, ungekünsteltem Vortrag ein Problem allseitig zu entwickeln, in der knappsten und elegantesten Form mathematisch einzukleiden

und unterstützt durch die ungemeine Lebhaftigkeit und Beweglichkeit seines Wesens den Eindruck hervorzurufen, als ob er eben jetzt, im Augenblick des Vortrages die Lösung gefunden hätte. Unter seiner Behandlung verschwanden die Schwierigkeiten, alles wurde einfach und leicht verständlich, es war jedesmal wie eine Neuschöpfung des betreffenden Kapitels. Kein Wunder, daß seine Schüler begeistert an seinen Lippen hingen, besonders da, wo er über seine eigenen Forschungen vortrug."

Als Forscher hat ZEUNER sich neben den technischen Gebieten auch mit großem Interesse und bleibendem Erfolge auf dem Gebiete der Statistik und des Versicherungswesens betätigt.

Schon in Freiberg war er mit einem umfassenden Gutachten über die Freiberger Knappschaftskasse beschäftigt gewesen und in Zürich traten bald ähnliche Aufgaben an ihn heran. Es handelte sich darum, für die Wittwen- und Waisenversorgung, die man damals nicht glaubte durchsetzen zu können, am Polytechnikum ein Äquivalent zu bieten durch eine Lebensversicherung, zu deren Prämien Schulkasse und Professoren zu ungefähr gleichen Teilen beitragen sollten. Die technischen Grundlagen hierfür schuf ZEUNER, auf Grund deren im Jahre 1862 mit der schweizerischen Rentenanstalt ein Vertrag geschlossen wurde, der sich als sehr wohltätig erwiesen hat und trotz mancher Einwendungen und trotzdem durch Bundesratbeschluß vom Jahre 1901 einer neu gegründeten Wittwen- und Waisenkasse ein ansehnlicher Bundesbeitrag zugewiesen wurde, auch heute noch besteht.[1])

Diese Aufgaben führten ihn zu einem vertieften Studium der statistischen Wissenschaften und veranlaßten ihn über die Theorie der Versicherungen Vorlesungen zu halten.

Angeregt durch ein im Jahre 1868 erschienenes Werk von KNAPP faßte er die von ihm gefundenen Resultate in den „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik" im Jahre 1869 zusammen, das aus drei Teilen besteht.

1) Die letzten Bemerkungen verdanke ich einer liebenswürdigen Mitteilung von Herrn Professor GEISER in Zürich.

Der erste Teil befaßt sich mit der formalen Bevölkerungslehre. Der große Fortschritt der ZEUNERschen Untersuchungen besteht in der Heranziehung überaus klarer und durchsichtiger Raumvorstellungen. ZEUNER führt drei im Raume senkrecht aufeinander stehende Achsen ein und benutzt als Koordinaten die Geburtszeit, das Alter und die Anzahl der Überlebenden, die aus der gegebenen Geburtszeit stammend das gegebene Alter erreichen. Die Beziehungen, die zwischen jenen drei Größen bestehen, können geometrisch durch eine Fläche wiedergegeben werden, die als Grundlage der gesamten formalen Bevölkerungstheorie dienen kann. Die analytische Behandlung führt zu der Darlegung der mannigfachen Beziehungen, die zwischen den verschiedenen Gesamtheiten der Lebenden und der Gestorbenen bestehen. Dieselbe zeichnet sich durch Klarheit und Einfachheit aus und kann auch heute noch neben den Knappschen Untersuchungen als eine wesentliche Grundlage der betreffenden Theorien angesehen werden.

Der Invalidität ist der zweite Teil des ZEUNERschen Werkes gewidmet. Auch hier gelingt es ihm, neue Gesichtspunkte in die Theorie zu bringen und eine Anzahl grundlegender Formeln aufzustellen, die sich durch Genauigkeit auszeichnen und trotz scharfer Angriffe ihren Platz bis heute behauptet haben.

Der dritte Teil befaßt sich mit der Unfallversicherung. Der ausgesprochene Zweck dieses Teiles war es, die leitenden Gesichtspunkte für dieselbe zu finden und den Anstoß zu geben, daß sie in Deutschland und in der Schweiz ins Leben treten möchte. Die Notwendigkeit der Unfallversicherung begründet ZEUNER vor allem damit, daß die Anzahl der Unfälle wesentlich vermindert werden würde, wenn große und vom Staate mit entsprechenden Vollmachten versehene Unfallversicherungen ihren Einfluß geltend machen und in Bergwerken, Fabriken und auf allen Eisenbahnen und Dampfschiffen auf Herstellung und vorzügliche Instandhaltung aller Vorrichtungen dringen, wodurch die Gefahr für die Versicherten vermindert und beseitigt werden kann.

ZEUNER zeigt sich hier als ein Mann, der seiner Zeit vorauseilt. Dieselben Gesichtspunkte, die er hier andeutet,

haben wesentlich mit zu der großen Unfallgesetzgebung geführt, deren wir uns heute im deutschen Reiche erfreuen dürfen.

ZEUNER hat den statistischen Untersuchungen sein Interesse bis an sein Lebensende bewahrt. So veranlaßte er z. B. das Königlich Sächsische statistische Bureau nach seinen Plänen genaue statistische Erhebungen über Sterblichkeit und Invalidität im sächsischen Bergmannsstande, sowie über die Sterblichkeit der sächsischen Bevölkerung durchzuführen, auf Grund deren er in den Jahren 1894 und 1903 Sterblichkeitstafeln für die sächsische Bevölkerung aufgestellt hat, die sich in Zukunft sicherlich von Bedeutung zeigen werden.

So wichtig diese Arbeiten auch waren, so sehr sie auch Beachtung in den interessierten Kreisen gefunden haben, so liegt doch in ihnen nicht ZEUNERS eigentliche wissenschaftliche Bedeutung — die muß vielmehr in seinen technischen Arbeiten gesehen werden.

In rascher Folge erschien die Mehrzahl derselben vor und in seiner Züricher Zeit und brachte seinen Namen in der gesamten technischen Welt des In- und Auslandes sehr bald zu hohem Ansehen.

Ihre Bedeutung, ihre mächtige Wirkung auf die Entwicklung der betreffenden Wissenszweige ist so oft und eingehend von sachverständiger Seite gewürdigt worden, daß an dem Gesamtbilde wohl kaum noch eine wesentliche Änderung eintreten dürfte und so kann ich mich darauf beschränken hier an dieser Stelle nur einiges bereits feststehendes kurz vorzuführen.

Die technisch wissenschaftliche Lebensarbeit von ZEUNER konzentriert sich im wesentlichen in vier Werken, von denen die drei ersten, wie schon bemerkt, in Zürich entstanden sind. Als Signatur derselben, vor allem der letzteren, dürfte es zu bezeichnen sein, daß sie zur rechten Stunde erschienen und einem tief gehenden, allgemein gefühlten Bedürfnisse entgegengekommen sind. Dann aber zeigt sich in ihnen eine ungemein glückliche Verbindung von Theorie und Praxis.

In hervorragender Weise tritt das schon in seinem ersten Werke über Schiebersteuerungen hervor, das im Jahre 1858 erschienen ist. In einer Neujahrsnacht, als er des Augenblickes

harrte, wo Glockenton vom Züricher See her das neue Jahr begrüßen sollte, entdeckte er die Figur des Schieberdiagrammes. Wenn diese Entdeckung auch nicht als seine tiefste bezeichnet werden kann, so ist sie doch rein äußerlich vielleicht die erfolgreichste. Vor dieser Entdeckung war man bei dem Entwurfe von Schiebersteuerungen auf mühsames Probieren angewiesen, wobei jede Übersicht des Einflusses der einzelnen Elemente besonders bei den komplizierten Kulissen und Schiebersteuerungen verloren ging. Das wurde durch das Zeunersche Diagramm und durch die anschließende graphische Behandlung der Schieberbewegung mit einem Schlage geändert.

Seine Methoden fanden die rascheste Verbreitung und wurden zum unentbehrlichsten Hülfsmittel des Konstrukteurs, denn nun war es nicht nur möglich, leicht und rasch die Lösung vorliegender spezieller Aufgaben zu finden, sondern auch neue Steuerungssysteme zu beurteilen und zu entdecken.

Diesem ersten Werke folgte bald das Werk über die mechanische Wärmetheorie, das als das wissenschaftlich bedeutungsvollste bezeichnet werden kann und in wiederholten Neuauflagen in vertiefter und erweiterter Form erschien.

Auf theoretischem und experimentellem Wege waren durch Carnot, Mayer, Clausius, Clapeyron, W. Thompson, Rankine u. a., dann durch Joule, Hirn und Regnault die Anschauungen über den Zusammenhang zwischen Wärme und Arbeit von den verschiedensten Standpunkten aus geklärt worden — den Kreisen der Ingenieure waren diese Lehren aber bis zum Erscheinen des Zeunerschen Werkes fast völlig fremd geblieben. Hier greift das Zeunersche Werk ein, das sich vornehmlich die Aufgabe stellte, die Gesetze der mechanischen Wärmetheorie den Maschineningenieuren klar zu legen. Diese Aufgabe hat Zeuner in glänzender Weise gelöst. Die analytischen Untersuchungen sind klar, eindringlich und einfach und werden wesentlich durch geometrische Betrachtungen und graphische Darstellungen erleichtert. Die dem Texte beigefügten Figuren, besonders die schematischen Darlegungen grundlegender Vorgänge in Maschinen und Apparaten sind meisterhaft gewählt und vorbildlich geworden. So ist es gekommen,

daß, wie Herr MOLLIER sagt, alle Ingenieure Deutschlands und zum großen Teile des Auslands diesem Werke ihre Kenntnisse der genannten Wissenschaft verdanken und auf dieses Werk auch heute noch in erster Linie zurückgreifen, wenn im praktischen Leben wärmetheoretische Fragen an sie herantreten. ZEUNER hat sich aber nicht nur mit der Darlegung der allgemeinen Prinzipien der Thermodynamik begnügt, ihm lag es daneben daran, eine Theorie der kalorischen Maschinen besonders der Dampfmaschinen auf Grund der mechanischen Wärmetheorie zu entwickeln. Dieser Teil bringt auch inhaltlich wesentlich neues und hat mächtig in die Entwicklung der betreffenden Disziplinen eingegriffen. Rastlos ist dieselbe durch die Mitwirkung vieler Ingenieure weiter gefördert worden und wenn es sich hierbei ergab, daß die Praxis Erscheinungen zeitigte, die den ZEUNERschen Annahmen nicht immer untergeordnet werden können, so kann das dem Werte des Werkes als grundlegendem keinen Abbruch tun. Es ist das um so weniger möglich, als unter denen, die jene neuen Erscheinungen mit der Theorie in Einklang zu bringen suchten, sich eine große Zahl von ZEUNERS besten Schülern fanden und ferner ZEUNERS Schriften sich hierbei als wertvollstes Werkzeug gezeigt haben.

Ich bin am Schlusse meiner Betrachtungen angelangt. Glänzend ist das Bild, das sich uns bei der Betrachtung des Lebens und des Wirkens von GUSTAV ZEUNER entrollt hat. Nach dreierlei Richtungen hin tritt er uns als hochstehender, hervorragender, seiner Zeit teilweise vorauseilender Mann entgegen, der es verstanden hat, seinen Namen untrennbar mit der Entwicklung dreier Hochschulen und mit der Entwicklung der technischen Wissenschaften unserer Zeit zu verbinden und sich in den Herzen seiner Schüler ein unvergängliches Denkmal zu setzen. Aus all dem hohen, vielseitigen und starken Streben und Wirken seines Lebens aber tritt uns bei tieferem Eindringen immer klarer und deutlicher ein einheitliches Bild entgegen, das Bild eines Mannes, der auf das wesentlichste dazu beigetragen hat, dem Namen des deutschen Ingenieurs das hohe Ansehen zu verschaffen, das er heute besitzt.

Benutzte Literatur.

1. Gustav Zeuner. Schweizerische Bauzeitung 1898.
2. Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens des eidgenössischen Polytechnikums. Erster Teil 1905.
3. Zur Erinnerung an den großen Forscher und Lehrer der Technik Gustav Zeuner. Sozial-Korrespondenz 1907.
4. Nachruf auf Zeuner von Mollier. Dresdner Bezirksverein deutscher Ingenieure 1907.
5. Nachruf auf Zeuner von Mollier. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1908.
6. Gustav Anton Zeuner. Nachruf von Helm. Naturwissenschaftliche Rundschau 1908.

Außer einer großen Anzahl von Abhandlungen erschienen von Zeuner folgende größere Werke:

1. Die Schiebersteuerungen mit besonderer Berücksichtigung der Lokomotiven-Steuerungen. Freiberg 1858. 6. Auflage, Leipzig 1904. Auch in französischer Sprache von Debize und Mérijot, Paris 1869 und in zwei englischen Übersetzungen, London 1869 und 1884 erschienen.
2. Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Leipzig 1860. 2. Auflage 1866. Neuer Abdruck derselben 1877. Französische Übersetzung von Cazin und Arnthal, Paris 1869. 3. Auflage unter dem neuen Titel: Technische Thermodynamik. Leipzig 1887—1890. Zweite Auflage 1900 und 1901. Dritte Auflage 1905 und 1906.
3. Über das Wanken der Lokomotiven. Zürich 1861.
4. Das Lokomotiven-Blasrohr. Zürich-Leipzig 1863. Französisch von Piron 1864.
5. Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig 1869. Italienisch Rom 1883.
6. Vorlesungen über Theorie der Turbinen. Leipzig 1899.

Druckfertig erklärt 25. XII. 1908.]

ADOLPH MAYER

NEKROLOG

GESPROCHEN IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1908

VON

O. HÖLDER, O. M.

Am 11. April 1908 verschied in Gries bei Bozen Adolph Mayer. In ihm haben wir ein hochgeschätztes, treues Mitglied verloren, das unserer Gesellschaft seit 1877 angehört hat. Von 1883 bis 1901 war er stellvertretender Sekretär der mathematisch-physischen Klasse.

Mayer ist am 15. Februar 1839 hier in Leipzig geboren. Er entstammte einer im 17. Jahrhundert aus St. Gallen eingewanderten Familie, deren Glieder, seitdem sie in Leipzig ansässig waren, stets dem Kaufmannsstand angehört und zwar meistens sich dem Bankfach gewidmet hatten. Seine Mutter ist ihm früh gestorben. Wissenschaftliche Begabung und Neigung wiesen ihn auf ein Universitätsstudium hin, und er wandte sich, nachdem er die Thomasschule absolviert hatte, nach Heidelberg, ursprünglich in der Absicht, Chemie zu studieren. Von Anfang an dehnte er dort seine Interessen auf Mathematik und Mineralogie aus. Er besuchte zwischendurch auch die Universität Göttingen, wo er besonders bei dem Mathematiker Stern hörte, und promovierte in Heidelberg mit einer mathematischen Arbeit. Es war vor allem die Anregung, die er an diesem Ort durch Otto Hesse erfahren hatte, die ihn bestimmte, sich von nun an ganz der Mathematik zu widmen, wobei er aber die mathematische Physik nicht vernachlässigte.

Mayer brachte nach der Promotion ein Semester in Leipzig zu, wandte sich dann nach Heidelberg zurück, siedelte aber im Herbst 1862 nach Königsberg über. In dem Kreis des Franz Neumannschen mathematisch-physikalischen Seminars, in den er dort eintrat, und der auch persönlich eng zusammen hielt, hat Mayer manchen Freund gewonnen, mit dem er das ganze Leben hindurch in persönlicher und wissenschaftlicher Verbindung gewesen ist. Bis August 1865 blieb er in Königsberg. Hier hörte er auch die Vorlesungen von Richelot, und es ist eine von Richelot gegebene Anregung gewesen, die ihn auf das der Variationsrechnung angehörende

Thema seiner Habilitationsschrift gebracht hat, mit der er sich im Jahr 1866 in Leipzig die venia legendi erwarb.

Im Dezember 1871 wurde er zum außerordentlichen Professor befördert. Die Vorlesung, die er beim Antritt seiner Professur gehalten hat, handelte von der Geschichte des mechanischen Prinzips der kleinsten Aktion. Bald nach der Ernennung zum Extraordinarius, im Jahr 1872, hat Mayer mit Margarete Weigel den Ehebund geschlossen, der für die ganze Folgezeit die Grundlage seines Lebensglücks und damit auch seiner fortgesetzten Schaffensfreude gewesen ist. Nicht lange nachher erhielt er einen Ruf nach Freiburg. Es war teils die Anhänglichkeit an die Universität Leipzig, der er auch später treu geblieben ist und in deren Interesse er stets in der uneigennützigsten Weise gewirkt hat, teils die Anhänglichkeit an unsere Stadt, vor allem aber die zarte Rücksicht gegen seinen alternden Vater, die ihn veranlaßte, dem Ruf zu entsagen. 1881 wurde er ordentlicher Honorarprofessor, im Jahr 1890 Ordinarius.

Im Frühjahr 1900 wurde Mayer auf sein Ansuchen dauernd beurlaubt. Kurze Zeit hat er dann nur seinen wissenschaftlichen Arbeiten gelebt; bald aber nahm er die ihm lieb gewordenen Vorlesungen wieder auf und hielt auch wieder Übungen ab. In den Übungen pflegte er auch seinen Schülern persönlich näher zu treten, denen er ein hilfreicher Freund war. Im Anfang des Jahres 1908, mitten im Semester, mußte er seine Wirksamkeit einstellen. Er suchte im Süden Heilung von einem Leiden, das ihn schon längere Zeit bedrückte, und sollte zu unser aller Leide nicht mehr lebend von dort zurückkehren.

Mayers wissenschaftliche Tätigkeit bewegte sich im wesentlichen in den Gebieten der Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und der Mechanik. Besteht zwischen diesen Gebieten an sich ein natürlicher Zusammenhang, so bildeten sie für Mayer in noch höherem Sinne eine Einheit, da seine Habilitationsschrift ihn auf das Prinzip der kleinsten Aktion geführt hat, das in seinen Interessen lange eine hervorragende Rolle spielte. Verwandelt doch dieses Prinzip

die Probleme der Mechanik in Variationsaufgaben, bei deren Behandlung dann gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen in gegenseitigem Zusammenhang auftreten.

Sucht man den Einfluß festzustellen, den andere Mathematiker oder deren Werke auf MAYER ausgeübt haben könnten, so findet man diesen Einfluß nicht gerade bei denen am größten, deren Vorlesungen er gehört hat. Die Arbeitsweise MAYERS stimmt am meisten mit derjenigen analytischen Richtung überein, die JACOBI in seinen berühmten Vorlesungen über Dynamik innegehalten hat, welche Vorlesungen ja auch die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit enthalten. MAYER pflegte auch selbst eine Vorlesung von ähnlichem Plan unter dem Titel der Dynamischen Differentialgleichungen zu lesen, um die sich ein großer Teil seiner wissenschaftlichen Arbeit gruppiert hat. Auf die Wahl der Stoffe seiner Untersuchungen hat wohl auch die nahe Beziehung gewirkt, die er in den letzten Jahren von CLEBSCH zu diesem unterhalten hat, während er die Eleganz, mit der er seine Probleme behandelte, neben seiner eigenen Begabung wohl dem Vorbild seines ersten Lehrers HESSE verdankt.

Im folgenden werden nicht alle, aber doch die meisten Arbeiten MAYERS besprochen werden. Die erste von denen, die dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen angehören, hat er 1871 veröffentlicht.[1]) Sie betraf die sogenannte erste JACOBIsche Integrationsmethode der Differentialgleichungen erster Ordnung. JACOBI hatte diese Methode aus den Untersuchungen von HAMILTON und PFAFF abstrahiert, und sie kommt im Grund auf die Integrationsmethode CAUCHYS hinaus, die damals JACOBI noch unbekannt war. Diese Methode hat in der an sich übersichtlichen JACOBIschen Form den Nachteil, daß sich ihr gewisse spezielle Fälle nicht fügen. MAYER deckte den wahren Grund dieser Ausnahmen auf, der darin besteht, daß in diesen Fällen eine Determinante verschwindet, und gab eine Modifikation der Methode, durch die auch die Ausnahmefälle bewältigt werden können.

1) Mathematische Annalen Bd. 3, S. 435.

Im folgenden Jahre entdeckte Mayer in demselben Gebiet ein wichtiges Resultat.[1]) Er studierte den Zusammenhang zwischen den Systemen linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung und Systemen von linearen totalen Differentialgleichungen, die „unbeschränkt integrabel", d. h. ebensovielen unabhängigen endlichen Gleichungen mit ebensovielen willkürlichen Konstanten äquivalent sind. Er fand, daß ein solches System von $m-\mu$ totalen Differentialgleichungen in m Variabeln sich auf ein einziges System von $m-\mu$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen läßt. Daraus ergab sich ihm dann das Theorem, daß die Integration eines nach der Bezeichnung von Clebsch „vollständigen" Systems von μ linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in m unabhängigen Variabeln auf die Integration eines Systems von $m-\mu$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückkommt. Dieses Resultat kann auch ohne die Hinzuziehung der totalen Differentialgleichungen abgeleitet werden;[2]) es ist aber offenbar der Zusammenhang mit diesen gewesen, der Mayer auf die Substitution geführt hat, die das genannte Theorem erschließt. Durch dieses Theorem wurde nun die Zahl und Ordnung der Operationen, die zur Integration eines „vollständigen Systems" erforderlich sind, bedeutend verringert. Damit wurde aber auch an der sogenannten zweiten Jacobischen Integrationsmethode, d. h. an der eigentlichen Jacobischen Methode, die ein beliebiges simultanes System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die Integration der vollständigen Systeme linearer homogener Gleichungen zurückführt, die weitgehendste Reduktion vorgenommen, die möglich ist, weshalb man jetzt auch von der Jacobi-Mayerschen Integrationsmethode für die allgemeinen Systeme erster Ordnung spricht.

1) ebenda Bd. 5, S. 448; m. vgl. auch Bulletin des sciences math. et astr. ser. I, tome 11 (1876), p. 87 u. p. 125 und diese Berichte, Bd. 43 (1891), S. 448.

2) Vgl. E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, bearbeitet von C. Bourlet, deutsch von H. Maser, 1893, p. 57.

Nachdem ihm dieser Wurf gelungen war, widmete er sich eine Reihe von Jahren, bis 1877, ausschließlich den verschiedenen Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und den damit zusammenhängenden Theorien. Er machte 1872[1]) die eben veröffentlichte neue Methode von Lie dadurch allgemeiner zugänglich, daß er von dem Fundamentaltheorem Lies, auf dem die Methode beruht, und das besagt, daß die Integration eines Involutionssystems von m Gleichungen mit n unabhängigen Variabeln auf die Integration einer einzigen Gleichung mit $n - m + 1$ unabhängigen Variabeln zurückkommt, analytische Beweise gab. Mayer hat dann auch die Liesche Methode etwas erweitert[2]) und den Begriff der Berührungstransformation, im Zusammenhang mit dem Lie seine Methode gefunden hatte, in den Kreis seiner Untersuchungen gezogen. Er gab 1874 ein einfaches, von der Theorie des Pfaffschen Problems unabhängiges Verfahren an, die Bestimmung aller Berührungstransformationen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen,[3]) während Lie diese Aufgabe als einen speziellen Fall des Pfaffschen Problems aufgefaßt hatte. Auf die Berührungstransformationen ist er später (1893) wieder zurückgekommen in einer Arbeit, deren Zweck es war, die Lehre von den infinitesimalen Transformationen, insbesondere Berührungstransformationen, unabhängig von der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen darzustellen und dadurch die zum Verständnis jener Begriffe und ihrer Anwendungen notwendigen Vorkenntnisse zu verringern.[4])

1876 hat Mayer eine andere Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die älter ist als die seinige, die aber mehr Operationen zur Durchführung erfordert, näher untersucht.[5]) Es war dies die Weilersche Methode, auch, wie Mayers eigene, eine Ver-

1) Göttinger Nachrichten 1872, S. 467; vgl. auch Math. Annalen Bd. 6 (1873), S. 162 u. S. 192.

2) Math. Annalen Bd. 8 (1875), S. 313.

3) Gött. Nachr. 1874, S. 317 u. Math. Annalen Bd. 8 (1875), S. 304.

4) Diese Berichte 1893, S. 697.

5) Annalen Bd. 9, S. 347.

einfachung der zweiten Jacobischen Methode. Mayer stellte das Weilersche Verfahren in verschiedenen Punkten richtig und gab zum ersten Mal eine wirklich klare Darstellung des Verfahrens.

Nach dem Jahr 1877 hat sich Mayer weniger mit den Differentialgleichungen beschäftigt, doch hat er in dieser Zeit auch außer der schon erwähnten Arbeit über die infinitesimalen Berührungstransformationen noch einige andere veröffentlicht, die sich in dem mit den Differentialgleichungen unmittelbar zusammenhängenden Gebiet bewegten. So hat er 1880 das Pfaffsche Problem behandelt.[1]) Er wies zum ersten Mal darauf hin, daß bei der Pfaffschen Lösung dieses Problems nur für den Fall, daß eine gewisse Determinante nicht verschwindet, wirklich bewiesen wird, daß die Lösung — wenn die Zahl der unabhängigen Variabeln des umzuformenden Pfaffschen Ausdrucks gerade ist — möglich ist. Es wird also in dem Fall, in dem die betreffende Determinante gleich Null ist, im Grund die Existenz der Lösung vorausgesetzt, und es werden dann erst nachträglich auf Grund dieser Voraussetzung gewöhnliche Differentialgleichungen für die Lösung aufgestellt. Mayer gab nun für den genannten Fall wirklich sichere Grundlagen der Pfaffschen Methode. 1890 hat er sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigt und dabei für gewisse Typen die Kriterien der allgemeinen vollständigen Integrierbarkeit, d. h. der allgemeinen Zurückführbarkeit auf Quadraturen angegeben.[2])

Ich wende mich jetzt den Arbeiten zu, die der Variationsrechnung angehören. Die Habilitationsschrift[3]) aus dem Jahr 1866, die hierher gehört, ist bereits kurz erwähnt worden. Es handelt sich in dieser Arbeit um die Maxima und Minima der einfachen Integrale in dem Fall, daß n unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ sammt ihren ersten Differentialquotienten

1) Annalen Bd. 17, S. 523.

2) Diese Berichte Bd. 42, S. 491.

3) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale, 1866; m. vgl. dazu Journal für die reine und angewandte Math. Bd. 69, S. 238.

unter dem Integral stehen, und außerdem gewisse Differentialgleichungen erster Ordnung als Bedingungsgleichungen gegeben sind. Clebsch hatte bereits für diesen Fall eine Umformung der zweiten Variation des Integrals gefunden, die der für den einfachsten Fall schon von Legendre aufgestellten entspricht. Die in der zweiten Variation unter dem Integral stehende Funktion wurde von Clebsch in drei Teile zerlegt. Der erste Teil ist eine quadratische Form F gewisser n Größen, die aus den Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ und ihren Ableitungen linear und homogen gebildet sind. Der zweite Teil ist der totale Differentialquotient einer quadratischen Form der Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ selbst, und der dritte ein linear und homogen aus den linken Seiten der Bedingungsgleichungen gebildeter Ausdruck. Es kommt dann, da die Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden sollen, schließlich nur auf den ersten der drei Teile an, der das Vorzeichen der zweiten Variation erkennen läßt.

Die Möglichkeit der genannten Umformung ist aber noch an eine Forderung geknüpft. Es tritt eine Determinante auf, deren Elemente außer von der unabhängigen Variabeln noch von willkürlichen Konstanten abhängen, und es müssen sich diese Konstanten so bestimmen lassen, daß die Determinante in dem ganzen Integrationsintervall $x_0 \cdots x_1$ von Null verschieden ist.

Mayer hat nun gezeigt, daß jene Determinante abgesehen von einem von der unabhängigen Veränderlichen x unabhängigen Faktor bei passender Bestimmung jener Konstanten mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial c_1} & \frac{\partial y_1}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial c_1} & \frac{\partial y_2}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial c_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_{2n}}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta(x, x_0)$$

zusammenfällt. In dieser Determinante sind $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Funktionen, welche die Differentialgleichungen lösen, die aus dem Nullsetzen der ersten Variation sich ergeben haben, und die noch die willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \cdots c_{2n}$ enthalten. Diese Konstanten sind aber in der Determinante nachträglich so zu spezialisieren, wie es der zu untersuchenden Lösung der Differentialgleichungen entspricht. Er konnte nun schließen, daß die zweite Variation gleich Null gemacht werden kann, wenn die auf der Seite von x_1 dem x_0 nächstliegende Wurzel der „Grenzgleichung" $\Delta(x, x_0) = 0$ in dem Integrationsintervall $x_0 \cdots x_1$ gelegen ist oder mit x_1 zusammenfällt, während andererseits, wenn die genannte Wurzel außerhalb des Intervalls liegt, die zweite Variation nur ein Vorzeichen annehmen und nicht verschwinden kann, falls jene quadratische Form F unter den betreffenden Bedingungen definit ist. So gelangte Mayer zu der wahren expliziten Form der verallgemeinerten Jacobischen Bedingung.

Mayer hat angegeben, daß er den Zusammenhang der beiden Determinanten an speziellen Integralen bemerkt habe, deren Maxima und Minima er auf Grund einer Anregung von Richelot untersucht hat. Es bewahrheitete sich also auch an ihm, der seinen Herleitungen und Darstellungen die größte Allgemeinheit zu geben liebte, die Tatsache, daß wichtige und fruchtbare Beziehungen allgemeiner Art vielfach zuerst auf induktivem Wege gefunden werden.

Mayer hob selbst hervor, daß gewisse Fälle vorhanden sind, in denen die Strenge der Schlußweise nicht behauptet werden kann, und die noch einer näheren Untersuchung bedürfen. Streng genommen bedarf auch der Schluß auf das wirkliche Vorhandensein eines Extremums in dem Fall, daß die zweite Variation nur ein Vorzeichen haben und nicht gleich Null werden kann, und der Schluß auf das Nichtstattfinden eines Extremums in dem Fall, daß die zweite Variation verschwinden kann, noch eines Beweises, selbst dann, wenn es sich nur um das sogenannte schwache[1]) Extremum handelt.

1) Im einfachsten Fall der Variationsrechnung heißt ein Extremum ein schwaches, wenn, geometrisch gesprochen, die Kurve, die das Ex-



Doch dies ist erst später erkannt worden und zwar von WEIERSTRASS, der allerdings seine Untersuchungen nur in Vorlesungen bekannt gab, und von dem leider so früh verstorbenen LUDWIG SCHEEFFER, dessen Arbeiten MAYER aufs höchste geschätzt hat. Auch die LAGRANGEsche Multiplikatorenmethode, die MAYER angewendet hat, um die Bedingungsgleichungen zu berücksichtigen, war damals noch nicht bewiesen. Sie hat ihm den Stoff zu späteren Arbeiten geliefert.

1877 hat MAYER die Kriterien des Maximums und Minimums bei den isoperimetrischen Problemen untersucht.[1]) Er hat dabei ein Reziprozitätsgesetz gefunden, das in dem einfachsten Fall darauf hinauskommt, daß die Funktion, die unter dem Integral steht, das ein Extremum werden soll, mit derjenigen Funktion, die in der Bedingungsgleichung unter dem Integral vorkommt, vertauscht werden kann. Es kommt ihm auch bei dieser Untersuchung hauptsächlich auf die Diskussion der zweiten Variation an. Um dabei die Resultate der Habilitationsschrift anwenden zu können, faßt er die isoperimetrischen Probleme, in denen Integralbedingungen vorgeschrieben sind, als spezielle Fälle des allgemeineren Problems auf, in dem die Bedingungen in Form von Differentialgleichungen gegeben sind. Die Multiplikatorenmethode kommt auch hier wieder zur Anwendung; es ergibt sich aber hier sofort, daß die Multiplikatoren, die beim allgemeinen Problem Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, sich auf Konstanten reduzieren. Darauf, daß eine solche Konstante in einem Fall, in dem Unstetigkeiten der Differentialquotienten der zu bestimmenden Funktionen zugelassen sind, nicht in verschiedenen Intervallen verschiedene Werte haben kann, hat MAYER ausdrücklich hingewiesen.

Integrale mit variabeln Grenzen hat er zuerst im Jahr 1884 betrachtet.[2]) Er ging dabei von der bekannten Auffassung

---

tremum vorstellen soll, nur mit solchen verglichen wird, die nicht bloß in ihrer Nähe verlaufen, sondern auch in den Richtungen wenig von ihr abweichen.

1) Diese Berichte Bd. 29, S. 114 und Annalen Bd. 13 (1878), S. 53.

2) Ber. Bd. 36, S. 99.

aus, daß in diesem Fall das Problem in zwei Teile geteilt werden kann, indem zuerst, geometrisch gesprochen, die zu bestimmende Kurve — im einfachsten Fall — zwischen ihren Endpunkten denselben Vorschriften zu genügen hat, die gelten müßten, wenn das Problem eines Extremums bei festgehaltenen Endpunkten gestellt wäre, und dann noch eine Aufgabe des gewöhnlichen Maximums oder Minimums zur Bestimmung der nicht bekannten Endpunkte selbst zu lösen ist. Mayer fand, daß diese zweite Aufgabe sich leicht behandeln läßt, wenn man die Differentialgleichungen, die sich aus dem ersten Teilproblem ergeben, durch Zurückführung auf ihre Hamiltonsche partielle Differentialgleichung integriert hat. Mayer ging dabei auf die Größen zweiter Ordnung der Entwicklungen ein und setzte voraus, daß auch hinsichtlich der diese Größen betreffenden Kriterien das Problem durch seine Teilprobleme gleichwertig ersetzt werden kann. Er hat erst später, im Jahr 1896, die Frage nach der Berechtigung der Zerlegung der Aufgabe aufgeworfen und durch eine doppelte rechnerische Durchführung des Problems, einerseits nach der Zerlegungsmethode und andererseits in ungeteilter Behandlung, gezeigt, daß sich dabei dieselben Kriterien ergeben.[1])

Im Jahr 1885 hat Mayer einen Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode erbracht; es ist dies für den allgemeinen Fall, in dem Bedingungsdifferentialgleichungen vorgeschrieben sind, die erste Begründung der Methode, die gegeben worden ist.[2]) Er hatte, wie ich schon erwähnte, in seinen früheren Arbeiten die Multiplikatorenmethode „gewissermaßen als Axiom" akzeptiert. Eine mündliche Diskussion mit Ludwig Scheeffer, der die Methode für den Fall der isoperimetrischen Probleme bewiesen hatte, gab Mayer die Anregung zur Auffindung des allgemeinen Beweises.

Er ging von dem Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n')dx$$

---

1) Ber. Bd. 48, S. 436.

2) Ber. Bd. 37, S. 7; vgl. auch Annalen Bd. 26 (1886), S. 74

aus, in dem n Funktionen $y_1, \cdots y_n$ der unabhängigen Veränderlichen x samt ihren Ableitungen vorkommen, die noch durch die Bedingungsdifferentialgleichungen

$$\varphi_k(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n') = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

aneinander geknüpft sind und für $x = x_0$ und $x = x_1$ vorgegebene Werte haben. Er machte nun zunächst den Ansatz, daß er die erste Variation

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} f dx$$

gleich Null setzte für solche Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ der Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, welche die Gleichungen

$$1) \qquad \delta \varphi_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

erfüllen und an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden. Für diesen bekannten Ansatz hat er keinen besonderen Beweis gegeben.[1] Die Gleichungen 1) lassen nun $n - m$ von den Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ willkürlich. Angenommen, es seien die Gleichungen 1) so beschaffen, daß man sie gerade nach den Differentialquotienten der Variationen

$$2) \qquad \delta y_{n-m+1}, \delta y_{n-m+2}, \cdots \delta y_n$$

auflösen kann, so sollen die übrigen Variationen

$$3) \qquad \delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_{n-m}$$

versuchsweise einmal beliebig, nur so, daß sie für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwinden, angenommen werden. Die Variationen 2) würden sich nun aus den Differentialgleichungen 1) und daraus, daß auch sie für $x = x_0$ gleich Null sein müssen, für das ganze Intervall ergeben, und es würden dann die Werte dieser Variationen sich im allgemeinen nicht auch für $x = x_1$ von selbst gleich Null herausstellen. Die Bedingung, der zu Folge die Variationen 2) für $x = x_1$ verschwinden sollten, die anfangs mit gestellt wurde, muß also eine weitere Beschränkung der Variationen 3) bewirken.

1) Der Ansatz bedarf des Beweises. Vgl. A. KNESER, Lehrbuch der Variationsrechnung, 1900, S. 228 bis 235, wo dieser Punkt zum ersten Mal für den Fall von Bedingungsdifferentialgleichungen erledigt ist.

Mayer hat nun gefunden, daß diese Beschränkung dadurch ausgedrückt wird, daß ein von x_0 bis x_1 erstrecktes Integral, unter dem die Variationen 3) linear und homogen vorkommen, gleich Null sein muß. Damit war nun die weitere Behandlung der Frage auf eine den isoperimetrischen Problemen analoge Aufgabe gebracht, und diese wurde von Mayer nach Analogie des von Scheeffer bei den isoperimetrischen Problemen benutzten Verfahrens, dessen Grundgedanke von Weierstrass herrührt,[1]) gelöst.

Diesen Beweis hat Mayer 1895 auf das allgemeinste Problem der Variationsrechnung mit einer unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt.[2]) Dieses allgemeinste Problem hatte er schon 1878 so gefaßt,[3]) daß er m Differentialgleichungen mit n gesuchten Funktionen der einen Veränderlichen x und $m < n$ angenommen hatte; es sollten dabei für $x = x_0$ die Werte aller Funktionen, für $x = x_1$ dagegen nur die Werte von $n - 1$ der Funktionen gegeben sein, während der Wert der $n$ten Funktion für das Argument $x = x_1$ unter den angenommenen Bedingungen ein Extremum werden sollte. Dieses Problem hatte Mayer damals behandelt, indem er die Multiplikatorenmethode als richtig vorausgesetzt hatte.

Bei den Beweisen für die Multiplikatorenmethode kam naturgemäß nur die erste Variation in Betracht. Die früher besprochenen Arbeiten Mayers aus dem Gebiet der Variationsrechnung beschäftigten sich alle mit der zweiten Variation, also im Grunde mit den feineren Bedingungen des schwachen Extremums. Die hinreichenden Bedingungen eines starken Extremums hat Mayer nicht bearbeitet. Vielleicht waren die Studien, die er in den letzten Jahren dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatz gewidmet hat,[4]) der mit den Weierstrassschen Untersuchungen über das starke Extremum in naher Beziehung steht, als eine Vorbereitung dazu gedacht.

Die Arbeiten Mayers über die gewöhnlichen Maxima und Minima möchte ich im Anschluß an die Variationsrechnung

---

1) Vgl. Math. Annalen Bd. 25, S. 583. 2) Ber. Bd. 47, S. 129.
3) Ber. Bd. 30, S. 16.
4) Ber. Bd. 55 (1903), S. 131; Bd. 57, S. 49 und S. 313.

erwähnen. Er hat im Jahr 1881 eine Untersuchung über die Frage veröffentlicht[1]), unter welchen Bedingungen ein von einem Punkt auf eine krumme Oberfläche gefälltes Lot wirklich einen größten oder kleinsten Abstand des Punkts von der Oberfläche darstellt. MAYER fügte hier den bekannten Resultaten, die sich auf die Krümmungsradien beziehen und sich aus der Betrachtung der Glieder zweiter Ordnung in den benutzten Entwicklungen ergeben, einige neue und elegante Sätze hinzu, zu deren Beweis die Glieder dritter Ordnung beigezogen werden müssen. Er zeigte zugleich, daß die Resultate, wenn sie analytisch gefaßt werden, sich auf den Fall von beliebig vielen Variabeln ausdehnen lassen. Es ist dies die einzige geometrische Arbeit MAYERS.

Noch einige Male ist er auf die Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima zurückgekommen. Von diesen Arbeiten möchte ich besonders die im Jahr 1892 verfaßte[2]) hervorheben, in der er die schwierigen Fälle untersucht hat, in denen die Glieder zweiter Ordnung in der Entwicklung der Funktion, die ein Extremum werden soll, eine semidefinite Form bilden. Er hat dabei eine eigentümliche Definition des Extremums benutzt. So wird z. B. gesagt, daß eine Funktion von drei Veränderlichen $f(x_1, x_2, x_3)$ an der Stelle a_1, a_2, a_3 ein Minimum besitze, wenn, geometrisch gesprochen, für jede durch a_1, a_2, a_3 gehende Kurve, für die sich die Koordinaten in der Nähe der Stelle a_1, a_2, a_3 in gewöhnliche Potenzreihen eines Parameters entwickeln lassen, in der Entwicklung von

$$f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) - f(a_1, a_2, a_3)$$

das erste nicht verschwindende Glied von gerader Ordnung und positiv ist. Wollte man ohne weiteres annehmen, daß das Kriterium, das sich auf Grund der erwähnten Definition ergeben hat, für ein Extremum im gewöhnlichen Sinn hinreichend sei, so würde man eine Hypothese machen, deren Richtigkeit in Frage gezogen werden kann. MAYER hat deshalb selbst den eingeschlagenen Weg für nicht ganz einwurfsfrei erklärt, indem er zugleich bemerkte, daß man sich mit weniger strengen

1) Ber. Bd. 33, S. 28. 2) Ber. Bd. 44, S. 54.

Methoden behelfen müsse, wo ein absolut sicheres Fundament fehle. Eine Arbeit von Stolz, die befriedigende Fundamente gelegt hat, hatte er gerade nicht mehr benutzen können.

In einer früheren Arbeit (1889) hat Mayer die Reziprozitätsgesetze entwickelt,[1]) die im Gebiete der gewöhnlichen Maxima und Minima bestehen und die den von ihm in der Variationsrechnung bei den isoperimetrischen Problemen gefundenen Gesetzen analog sind.

Mayers erste mechanische Arbeit war historischer Art und wurde durch seine Antrittsvorlesung veranlaßt. Diese Untersuchung der Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion ist erst im Jahre 1877 gedruckt worden.[2]) Er hat hier namentlich die Anfänge des Prinzips völlig klar gelegt und insbesondere das Verdienst Eulers in das richtige Licht gesetzt, der zuerst ein präzises Prinzip, allerdings für einen speziellen Fall, aufgestellt hatte, während Maupertuis' Formulierungen ganz vager Natur waren. Hinsichtlich der Form, die Lagrange dem Prinzip gegeben und nicht ganz deutlich gefaßt hatte, kam er zu dem Ergebnis, daß Lagrange das von uns nach Hamilton benannte Prinzip gemeint haben müsse. Diese Auffassung hat Mayer später als nicht zutreffend erkannt und unumwunden zurückgenommen.[3])

Mit dem kinetischen Potential, d. h. mit dem Fall, daß das Potential von Massen nicht nur von ihren Lagen, sondern auch von ihren Geschwindigkeiten abhängt, hat er sich mehrfach beschäftigt. In der ersten dieser Untersuchungen aus dem Jahre 1877 hat er den allgemeinsten Ausdruck des kinetischen Potentials unter der Voraussetzung bestimmt, daß zugleich das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erfüllt ist[4]), d. h. daß die Kräfte so beschaffen sind, daß sie im Gleichgewicht sein würden, falls das System starr wäre. Viel später (1896) hat Mayer die von v. Helmholtz

1) Ber. Bd. 41, S. 308.

2) Geschichte des Prinzips der kleinsten Action, Leipzig, 1877, übersetzt in Boncompagni, Bull. bibl. stor. sc. mat. 1878.

3) Ber. Bd. 38 (1886), S. 343.

4) Ber. Bd. 29, S. 86 u. Math. Annalen Bd. 13 (1878), S. 20.

aufgestellten Bedingungen bewiesen, denen die in den Koordinaten und deren ersten und zweiten Ableitungen ausgedrückten Komponenten der auf ein materielles System wirkenden Kräfte entsprechen müssen, damit ein kinetisches Potential existiert.[1]) Während v. Helmholtz den Beweis seiner Formeln nur angedeutet, und Koenigsberger für den Beweis einen anderen Weg angegeben und zugleich die Formeln bedeutend verallgemeinert hatte, benutzte Mayer in der erwähnten Arbeit ein besonderes Jacobisches Variationsverfahren, durch das dann auch die interessanten Koenigsbergerschen Formeln mit äußerst wenig Rechnung vollständig hergeleitet werden.

Aus dem Jahre 1879 ist eine Arbeit[2]) über die relative Bewegung eines Systems irgendwie verbundener materieller Punkte um ihren Schwerpunkt. Hier bestimmte Mayer die Anzahl und Ordnung der Operationen, die im Sinne der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen nötig sind, um die Bewegung, die relativ zum Schwerpunkt statt hat, auf bloße Quadraturen zurückzuführen. Dabei wird vorausgesetzt, daß für diese relative Bewegung das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft und die drei Flächensätze gelten. Dies ist eine Untersuchung ganz im Geist der Jacobischen Dynamik, die sich mit den Vorteilen beschäftigt, „welche man bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus der besonderen Form dieser Gleichungen ziehen kann.“ In ähnlichem Sinne hat Mayer 1893 die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer rauhen Kurve oder einer rauhen Fläche[3]) und 1902 die vollständige Bestimmung der Rotation eines starren Körpers unter der Voraussetzung, daß seine Winkelgeschwindigkeit schon gefunden ist,[4]) erörtert.

In den Jahren 1898 bis 1902 hat sich Mayer ausschließlich mit Mechanik und zwar hauptsächlich mit dem Stoß und der Reibung beschäftigt. In einer Arbeit[5]) aus dem Jahr 1898 hat er gewisse Sätze verallgemeinert, die Routh gegeben hatte, und die erlauben, die sämtlichen nach einem Stoß eintretenden

1) Ber. Bd. 48, S. 519. 2) Ber. Bd. 31, S. 34.
3) Ber. Bd. 45, S. 379. 4) Ber. Bd. 54, S. 53.
5) Ber. Bd. 50, S. 246; vgl. auch Bd. 51, S. 215.

Geschwindigkeiten durch eine Minimumsaufgabe zu finden, falls der Stoß nur darin besteht, daß gewissen Punkten des materiellen Systems bestimmte Geschwindigkeitsänderungen oder dem ganzen System bestimmte, vorher nicht vorhandene Verbindungen plötzlich aufgezwungen werden. Mayer setzte diese Sätze mit dem Gaussschen Prinzip des kleinsten Zwangs in Verbindung, für das er eine besondere Vorliebe hatte.

1899 hat er den Fall betrachtet, daß ein materielles System Ungleichungen unterworfen ist,[1]) und hat einen Trugschluß, der sich in die bekannten Arbeiten Ostrogradskys eingeschlichen hatte, und der von Study zuerst bemerkt worden war, ausführlich dargelegt. Zugleich hat er auch die Stöße unter der Voraussetzung behandelt, daß dabei Ungleichungen gelten.[2])

In den eben erwähnten Arbeiten hatte Mayer von Reibung vollständig abgesehen. 1901 fing er an, die Gesetze der gleitenden Reibung in ihren Konsequensen zu untersuchen.[3]) Er beschränkte sich auf den Fall, daß die Reibung nur in einem Punkte wirkt. Dabei richtete er sein Augenmerk besonders auf einen solchen Moment, in dem Ruhe herrscht, während in dem unmittelbar darauf folgenden Zeitintervall ein Gleiten eintritt.[4]) Er stellte sich nun eine besondere Frage, die vorher noch nicht aufgeworfen worden war. Handelt es sich z. B. darum, daß ein und derselbe Punkt des materiellen Systems auf einer festen Kurve oder Fläche gleitet, so wird dieser Punkt in dem betrachteten kleinen Zeitintervall aus der Ruhe heraus eine kleine Geschwindigkeit bekommen, die mit seiner Beschleunigung gleiche Richtung hat; es wird deshalb die Reibung in dem Zeitintervall der Beschleunigung entgegengesetzt und absolut gleich dem vollen Produkt von Normaldruck und Reibungskoeffizient sein. Nimmt man nun die Reibungskraft gleich diesem Produkt in irgend einer Richtung an, so ergeben die Differentialgleichungen der Bewegung zusammen mit den Bedingungsgleichungen des Systems den

1) Ber. Bd. 51, S. 224. 2) ebenda S. 245.

3) Ber. Bd. 53, S. 235.

4) Die Kräfte können möglicherweise auch erst zu wirken anfangen.

Normaldruck samt der Größe und Richtung der Beschleunigung des Punktes. Falls nun diese Richtung nicht der angenommenen der Reibung entgegengesetzt herauskommt, kann diese der angenommenen Richtung entgegengesetzte nicht die wahre Bewegungsrichtung des Punktes sein. Es ist möglich, daß auf diese Weise jede angenommene Richtung auf einen Widerspruch führt, und sich somit die Bewegung des Punktes als unmöglich erweist. Mayer stellte sich nun die Frage, ob in jedem Fall, in dem jene Differentialgleichungen die Bewegung als unmöglich erscheinen lassen, die Gesetze der Reibung, so wie sie für die Ruhe formuliert werden, wirklich den Ruhezustand als möglich ergeben, d. h. also, ob nicht in den Gesetzen der Reibung selbst ein Widerspruch enthalten ist. Er gelangte zu dem Resultat, daß im allgemeinen kein Widerspruch auftritt. Außerdem hat er noch die Frage beantwortet, wann bei einem starren Körper, der sich auf rauher Unterlage bewegt, der Normaldruck, den der Körper auf die Unterlage ausübt, unabhängig von der Reibung ist.

Im Jahre 1902 hat Mayer den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung untersucht,[1]) wobei er die Methoden, die von Darboux und Routh in der Behandlung dieser Frage benutzt worden sind, mit einander verbunden hat.

Nach diesen Arbeiten erschienen als letzte Veröffentlichungen Mayers in den Jahren 1903—1905 die schon erwähnten Untersuchungen über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz.

Überblicken wir Adolph Mayers wissenschafliche Lebensarbeit, so bietet sich ein überaus einheitliches und zugleich reiches Bild dar. Er hat drei nahe zusammenhängende und doch weite Felder der Wissenschaft mit großem Erfolge bebaut. Arbeiten anderer auf diesen Gebieten hat er genau verfolgt und vielfach eigene Untersuchungen an sie angeknüpft. Es lag in seiner Natur, daß er nur bei der gewissenhaftesten Durchführung seiner Arbeiten Befriedigung empfand, und so

---

1) Ber. Bd. 54, S. 208 u. 327.

hat er von Anfang an nach Exaktheit und Vollständigkeit gestrebt und stets nach den Ausnahmen der „im allgemeinen“ geltenden Sätze gesucht. War er von einer mehr formal eleganten analytischen Richtung ausgegangen, so entwickelte er sich nach der strengeren Seite hin, indem er mehr und mehr dazu kam, Annahmen, die er früher ohne weiteres zugelassen hatte, zu beweisen. Er war aber nicht geneigt, durch solche Anforderungen der Strenge sich zu sehr aufhalten zu lassen; nicht überall ging er auf die Grundlagen der Analysis zurück und er hat es öfters ausgesprochen, daß Annahmen nichts schaden, wenn sie nicht stillschweigend gemacht werden. Fand er an einer seiner Arbeiten etwas zu verbessern, so hob er ausdrücklich hervor, was ihm an seinem früheren Standpunkte nicht mehr genügte. Seinem aufrichtigen und bescheidenen Charakter wurde dieses Zugeständnis nicht schwer.

Die geschilderten Grundzüge seines wissenschaftlichen Wesens kamen auch seinen Schülern zu gute in den Vorlesungen, die er auf das sorgfältigste ausarbeitete und in denen er niemals Schwierigkeiten verschleierte und umging, sondern die Zuhörer dahin zu bringen suchte, die Schwierigkeiten zu überwinden.

Wir aber dürfen ihn in seiner Sorgfalt, in seiner Aufrichtigkeit, in der Bescheidenheit, Einfachheit und Selbstlosigkeit, die ihn in seiner wissenschaftlichen und amtlichen Wirksamkeit wie im Leben ausgezeichnet haben, als ein leuchtendes Vorbild betrachten. Diesem Vorbild nachzustreben, wollen wir nie müde werden.

Verzeichnis
der im vorstehenden nicht angeführten Arbeiten Mayers.

1870. Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht, Math. Annalen, Bd. 2, S. 143.

1871. Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Funktion, Annalen, Bd. 4, S. 88.

1872. Zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen, Gött. Nachr. S. 315.

1872. Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, ebenda S. 405.

1873. Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Gött. Nachr. S. 299.

1877. Über den Multiplikator eines JACOBISCHEN Systems, Math. Ann. Bd. 12, S. 132.

1880. Über die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwertung durch die Methoden von LIE, Math. Ann. Bd. 17, S. 332.

1883. Über die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst, Ann. Bd. 22, S. 368.

1887. Über ein Bewegungsproblem, diese Ber. Bd. 39, S. 123.

1889. Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums, ebenda Bd. 41, S. 122.

1890. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, Ann. Bd. 37, S. 399.

1899. Die Gleichgewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichgewichtes, Leipziger Programm.

1899. Zur Theorie der Bewegung von Punktsystemen unter dem Einfluß von Potentialkräften, diese Ber. Bd. 51, S. 1.

Druckfertig erklärt 5. I. 1909.]

WORTE ZUM GEDÄCHTNIS AN

WILHELM SCHEIBNER

NEKROLOG

GESPROCHEN IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1908

VON

C. NEUMANN

Hochgeehrte Versammlung!

Unsere Gesellschaft hat einen schmerzlichen Verlust zu beklagen. Am 8. April 1908 wurde uns unser ältestes Mitglied WILHELM SCHEIBNER durch den Tod entrissen.

Er war mit vielen Mitgliedern unserer Gesellschaft aufs engste verbunden, namentlich auch mit den ebenfalls schon dahingeschiedenen Mitgliedern: HANKEL, DROBISCH, FECHNER, ZÖLLNER, HANSEN, ERNST HEINRICH WEBER und WILHELM WEBER.

Vor einem halben Jahrhundert wurde auch mir das Glück zu teil, den Verstorbenen kennen zu lernen, und ihn als einen wahren und zuverlässigen Freund schätzen und verehren zu dürfen, auf dessen Rat und Beistand ich mich unbedingt verlassen konnte. — Auch in wissenschaftlicher Beziehung bin ich ihm für viele Anregungen und mancherlei Förderungen zu größtem Dank verpflichtet.

WILHELM SCHEIBNER wurde am 8. Januar 1826 zu Gotha geboren. Sein Vater, Großherzoglicher Rat, war Beamter für das Rechnungswesen an der Lebensversicherungs-Gesellschaft zu Gotha.

WILHELM SCHEIBNER besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt, studierte 1844—45 in Bonn, sodann aber 1845 bis 1848 in Berlin, wo es ihm vergönnt war, in nähere Beziehung zu treten zu den berühmten Mathematikern JACOBI, DIRICHLET und STEINER. Im Jahre 1848 wurde er von der Universität Halle zum Doktor promoviert. Sodann kehrte er in seine Vaterstadt zurück. Hier erregte er durch seinen wissenschaftlichen Eifer und durch seine Begabung die Aufmerksamkeit des berühmten Astronomen HANSEN. Und die Freundschaft und die wissenschaftlichen Anregungen dieses ausgezeichneten Mannes sind für seine weitere Zukunft, nament-

lich für seine wissenschaftlichen Arbeiten von größter Bedeutung gewesen.

Im Jahre 1853 habilitierte sich Scheibner an unserer Universität als Privatdozent. Im Jahre 1856 wurde er Professor extraordinarius. Und im Jahre 1868 erfolgte seine Ernennung zum ordentlichen Professor der Mathematik.

Wirft man einen Blick auf Scheibners wissenschaftliche Arbeiten, so wird es heutzutage fast befremdlich erscheinen, daß dieselben nur zum Teil mathematischer Natur, zum andern Teil aber astronomischen und physikalischen Inhalts sind. Denn im Laufe der Zeit ist der Prozeß der Arbeitsteilung leider so weit vorgeschritten, daß man vom Mathematiker eigentlich nur noch mathematische, und vom Physiker nur noch physikalische Arbeiten erwartet.

Das war früher anders. — Newton, Euler, die Bernouilli's, Lagrange, Fourier, Cauchy, Green, Gauss, Jacobi, Dirichlet, Riemann haben nicht nur rein *mathematische* Arbeiten geliefert, sondern gleichzeitig auch in *astronomische* und *optische*, überhaupt in *physikalische* Untersuchungen sich vertieft.

Zu jener Schule der alten Mathematiker gehört auch Scheibner. Auch *seine* Arbeiten beziehen sich nur zum Teil auf die *reine Mathematik*, zum andern Teil aber auf *Astronomie* und *Optik*. Und einige kleinere Aufsätze lassen erkennen, mit welch' regem Interesse er auch den *elektrostatischen* und *elektrodynamischen* Untersuchungen zu folgen bemüht war.

Und, wenn man heutzutage behauptet, die Mathematik sei *eine Welt für sich*, die völlig auf sich selber beruhe, die ganz selbständig *nach ihren eignen Gesetzen sich entwickele*, die Alles aus sich selber schöpfe, und keiner äußeren Anregungen bedürfe, — so ist das eine Ansicht, der Scheibner durchaus nicht beipflichtete.

Es mag gestattet sein, die Anschauungen Scheibners über diesen Punkt durch einen gewissen Vergleich zu charakterisieren.

Betrachtet man irgendeine Pflanze oder irgendeinen Baum, z. B. die Birke oder Eiche, — so kann man allerdings sagen,

die Eiche sei *eine Welt für sich*, sie entwickele sich *nach ihren eigenen Gesetzen*. — Gewiß, aber der äußeren Anregungen *bedarf sie*. Sie bedarf des nährenden Bodens, sie bedarf der sie umspülenden Luft, sie bedarf des Regens und Sonnenscheins.

Ähnlich verhält es sich, wenn wir uns in Scheibner's Vorstellungen hineinversetzen, mit der Mathematik. Auch die Mathematik ist *eine Welt für sich*; auch sie entwickelt sich *nach ihren eigenen Gesetzen*. Aber auch sie bedarf gewisser äußerer Anregungen. Sie würde, ohne solche Anregungen, recht bald verflachen und verkümmern.

Vielleicht wagt man zu erwidern: das seien *vergangene* Zeiten; *früher* sei das so gewesen, als die Mathematik gewissermaßen noch in den Kinderschuhen steckte. *Jetzt* aber sei sie erwachsen und selbständig. Jetzt bedürfe sie nicht mehr irgendwelcher Einwirkungen von außen her, und gehe *ihren eignen Weg*.

Das ist eine Ansicht, die unser verewigter Kollege Scheibner durchaus nicht teilte. Und ich möchte hinzufügen: in einer solchen Ansicht würde eine gewisse Überhebung liegen, die für den weiteren Fortschritt der mathematischen Wissenschaft nur verderblich sein könnte.

Von welch' mächtigem Einfluß *äußere* Anregungen, namentlich die von den Naturwissenschaften ausgehenden Anregungen auf die Entwicklung der Mathematik gewesen sind, — das tritt uns z. B. deutlich entgegen, wenn wir einen Blick werfen auf die Fourier'sche *Wärmetheorie*, namentlich auf seine Untersuchungen über die *Wärmeverteilung*. — Fast unwillkürlich wurde Fourier, im Verlaufe seiner Untersuchungen, zu gewissen Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen geführt. Hierdurch aber entstanden für den Mathematiker neue und wichtige Fragen:

Ist jede beliebige Funktion durch eine Fourier'sche Reihe ausdrückbar? Kann jede beliebige Funktion in Form eines Fourier'schen Integrals dargestellt werden? Und wenn das nicht der Fall sein sollte, — welchen Bedingungen muß die Funktion entsprechen, damit sie der einen oder andern Darstellung fähig sei?

Vor beinahe hundert Jahren sind diese Fragen an uns herangetreten. Und noch immer fehlt uns eine wirklich befriedigende und den ganzen Gegenstand erschöpfende Beantwortung. Dirichlet war der erste, der in dieses dunkle Gebiet mit wirklichem Erfolg sich hineinwagte. Und diese Dirichlet'schen Untersuchungen sind epochemachend gewesen für die mathematische Wissenschaft. Sie führten zu einer *wesentlichen Vertiefung* der ganzen Wissenschaft, namentlich zu scharf ausgeprägten Begriffen über gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz, namentlich aber auch zu einer schärferen Fassung des Begriffes der Stetigkeit; (wobei übrigens zu Anfang ebenfalls unterschieden wurde zwischen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Stetigkeit). — Hieran knüpften sich dann weiter mathematische Entdeckungen ersten Ranges, wie z. B. die wirkliche Aufstellung einer stetigen Funktion ohne Differentialquotienten durch Weierstrass.

Als ein zweites Beispiel für den großen Einfluß der Naturwissenschaften auf die Entwicklung der Mathematik, mag erinnert sein an das Newtonsche Gravitationsgesetz und das diesem Gesetz entsprechende Potential.

Wenn man die von Green und Gauss über dieses Potential angestellten Untersuchungen und zugleich auch die betreffenden Vorlesungen von Dirichlet studiert, und wenn man überdies beachtet, daß Riemann ein Schüler von Dirichlet war, — so wird man wohl kaum in Zweifel darüber sein können, daß jene vom Newtonschen Gesetz ausgehenden physikalischen Untersuchungen von allergrößtem Einfluß gewesen sind auf Riemanns rein mathematische Arbeiten über die elliptischen und Abelschen Integrale.

Ebenso wird — um ein drittes Beispiel anzuführen —, das Newtonsche Gesetz oder Potential zu bezeichnen sein als die eigentliche Quelle derjenigen Betrachtungen, durch welche Dirichlet zu seinem berühmten *Prinzip* gelangte. Dieses Prinzip war ein Irrtum. Aber es hat die Mathematiker recht lange in Atem gehalten, und eine wesentliche Vertiefung der Wissenschaft hervorgebracht, und zugleich auch eine gewisse Erweiterung derselben.

Endlich sei erinnert, was die neueste Zeit anbelangt, an die schönen Untersuchungen HILBERTS über die sogenannten Integralgleichungen. Diese Untersuchungen lehnen sich an an die bekannten Potentialuntersuchungen von GREEN und GAUSS. Und sie haben daher ebenfalls — in letzter Instanz — ihren Ursprung im NEWTONschen Gesetz.

Von all' diesen Dingen ist zwischen SCHEIBNER und mir recht häufig die Rede gewesen. Und ich habe hier nur die Anschauungen SCHEIBNERS (die zugleich auch die meinigen sind), in deutliches Licht zu setzen gesucht. — Noch wenige Worte hinzuzufügen, mag mir gestattet sein.

Wie gewaltig der Einfluß der Naturwissenschaften, namentlich der Astronomie und Physik auf die hervorragendsten Mathematiker gewesen ist, — das geht z. B. auch deutlich hervor aus einer von JACOBI im Jahre 1832 in Königsberg gehaltenen Rede. JACOBI unterscheidet dort, was die Entwicklung der Mathematik anbelangt, zwischen *wahren* und *zufälligen* Ursachen, *inter causas veras et accidentes. — Est causa vera progressus matheseos, necessaria ejus explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas, aeternas. Causa accidens potest esse quaestio physica, pomum cadens*, usw. Dann aber fährt JACOBI fort: Er selber sei der festen Überzeugung, daß, wenn erst die Theorie der Doppelintegrale und die Theorie der elliptischen Funktionen zur wirklichen Vollendung gelangt seien, daß es alsdann uns auch beschieden sein werde, hinzugelangen zur Lösung des *astronomischen Störungsproblemes, problematis illius paene desperati.* — So gibt JACOBI deutlich genug zu erkennen, wie sehr er bei seinen tiefsinnigen und mühsamen mathematischen Untersuchungen angeregt wurde durch die Hoffnung zur Lösung jenes *astronomischen Problems* zu gelangen, wie groß also die treibende Kraft war, welche jene *causa accidens* auf seine eignen Untersuchungen ausübte.

Auch DIRICHLET gab sich solchen Hoffnungen hin, und glaubte sogar schon zum Ziele gelangt zu sein. Denn in den letzten Tagen seines Lebens machte er in Göttingen seinem Freunde KRONECKER die Mitteilung: er sei jetzt zu einer

Methode gelangt, die ihn in den Stand setze, das *astronomische Störungsproblem* mit voller Sicherheit und mit jeder beliebigen Annäherung zu lösen. — Leider pflegte DIRICHLET nichts niederzuschreiben, bevor die Dinge in seinem Kopf eine völlig fertige Form erlangt hatten. Und wir wissen daher nicht, ob DIRICHLET damals wirklich im Besitz eines Geheimnisses gewesen ist, welches durch seinen Tod für immer verloren gegangen ist, — oder ob er sich geirrt hatte.

Allerdings sind unter den Mathematikern Stimmen laut geworden, die die Möglichkeit einer solchen Entdeckung, wie DIRICHLET sie gemacht haben wollte, kurzweg in Abrede stellen. — Ein so schlechtweg absprechendes Urteil dürfte aber doch wohl als *übereilt* zu bezeichnen sein.

Zu den ausgezeichneten Mathematikern, die dem *astronomischen Störungsproblem* einen großen Teil ihres Lebens gewidmet haben, — gehört nun namentlich auch HANSEN und sein Schüler SCHEIBNER.

Im ganzen sind unter SCHEIBNERS Arbeiten folgende zu nennen, die auf das Störungsproblem oder andere astronomische Probleme Bezug haben:

Über die Berechnung einer Gattung von Funktionen, welche bei der Entwicklung der Störungsfunktion erscheinen (Gotha. 1853).

Über die asymptotischen Werte der Koeffizienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwicklungen (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1856; auch in GOULDS Astron. Journ. IV.).

Notiz über das Problem der drei Körper. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1866, S. 33.)

Zusätze (ebendaselbst, S. 370).

Satz aus der Störungstheorie. (Auszug aus einem Schreiben an BORCHARDT; Crelles Journal. Bd. 65; 1866).

Über das Problem der drei Körper. (Auszug aus einem Schreiben an BORCHARDT; Crelles Journal. Bd. 68; 1868).

Zusatz zu einer HANSENschen Abhandlung über Teilungsfehler. (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1874. S. 665).

Anhang und Nachtrag zu HANSENS dioptrischen Untersuchungen (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1874. S. 773).

Nachschrift zu HANSENS Abhandlung über die Störungen der großen Planeten. (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1875. S. 473).

PETER ANDREAS HANSEN. Nekrolog. (Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft, X. Jahrgang. 1875).

Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das HANSENsche Objektiv. (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1876).

Die asymptotischen Werte der Koeffizienten in der Entwicklung einer beliebigen Potenz des Radiusvektors nach der mittleren Anomalie (Math. Annalen. 1880. S. 531).

Über die asymptotischen Werte der Koeffizienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwicklungen. (Math. Annalen. 1880. S. 545).

Einige Arbeiten C. G. J. JACOBIS auf dem Gebiete der Störungstheorie. (Astr. Nachrichten. 1882. Bd. 102).

Die gestörte elliptische Bewegung. HANSENS ideale Koordinaten. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1897).

Über die formale Bedeutung des HAMILTONschen Prinzips und das WEBERsche Gesetz. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1897).

Über den Einfluß des NEUMANNschen Exponentialgesetzes auf die elliptische Bewegung. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1898).

Über HANSENS Verfahren zur Berechnung der speziellen Störungen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1898).

Die Differentialgleichungen der Mondbewegung. (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1899).

HERSCHELS Bedingung für die Konstruktion von Objektiven. (Astronom. Nachrichten. 1890).

Beunruhigend macht sich bei diesen Untersuchungen der Umstand geltend, daß die eigentliche Basis derselben, nämlich das NEWTONsche Gravitationsgesetz durch die LEVERRIERschen Beobachtungen in Frage gestellt erscheint. Denn zufolge dieser Beobachtungen, bewegt sich der *Merkur* wesentlich anders, als es nach der aus dem NEWTONschen Gesetz entspringenden Theorie der Fall sein müßte.

SCHEIBNER hat diesem Umstande in einer der genannten Abhandlungen dadurch Rechnung zu tragen versucht, daß er dem NEWTONschen Gesetz eine gewisse Modifikation zu Teil werden läßt. Und zwar hat er im ganzen *zwei* solche Modifikationen der näheren Betrachtung unterworfen. Die eine beruht auf der wohl zuerst von LAPLACE angedeuteten Vorstellung, daß die Kraft einer gewissen Zeit bedarf, um, vom Augenblick ihrer Entstehung an, zur *wirklichen Wirkung* zu gelangen. Und die andere besteht darin, daß, an Stelle des NEWTONschen Gesetzes, das sogenannte Exponentialgesetz

substituiert wird. Aber beide Annahmen erweisen sich, wie SCHEIBNER zeigt, als unbrauchbar für den genannten Zweck.

Immerhin haben SCHEIBNERS hierauf gerichtete Bemühungen wesentlich zur Orientierung beigetragen. Sie haben wesentlich beigetragen zur Beleuchtung des augenblicklichen Zustandes der Dinge, — zugunsten weiterer Forschungen.

Auch scheint es jetzt einem hervorragenden Astronomen: SEELIGER in München, einem Schüler SCHEIBNERS, wirklich gelungen zu sein, Licht in dieses Dunkel zu bringen. — SEELIGER ist nämlich der Ansicht, daß der eigentliche Grund jener LEVERRIERschen Beobachtungen in denjenigen *Massen* zu suchen sei, die das sogenannte *Zodiakallicht* erzeugen. Neben der Einwirkung dieser Massen wird von ihm noch in Anschlag gebracht eine äußerst geringe Rotation, welche das astronomische Koordinatensystem in bezug auf das absolute Koordinatensystem besitzen soll.

Es steht zu hoffen, daß diese Gedanken von SEELIGER durch weitere Untersuchungen sich bestetigen möchten. Aber Unklarheiten werden alsdann immer noch zurückbleiben. Hat doch SEELIGER selbst wiederholt darauf aufmerksam gemacht, daß das NEWTONsche Gesetz (aus gewissen ganz bestimmten Gründen) kein Universalgesetz sein könne, daß es also früher oder später durch *andere theoretische Grundlagen* ersetzt werden müsse.

Diese Andeutungen dürften vielleicht eine Ahnung geben von dem unwegsamen und zerklüfteten Terrain, in welchem SCHEIBNERS Arbeiten sich bewegen, zugleich aber auch von der unermüdlichen Ausdauer, welche SCHEIBNER all' diesen Schwierigkeiten gegenüber, an den Tag gelegt hat, — endlich aber auch von der *ungeheuren Langsamkeit,* mit welcher unsere wirklichen Einsichten zunehmen.

Man hört häufig vom *schnellen* Fortschreiten der Naturwissenschaften sprechen. Aber es dürften wohl kaum jemals so *trügerische* Worte in die Welt gesetzt, und in weiten Kreisen nachgesprochen worden sein.

Man verwechselt dabei die *Anzahl* der beobachteten Erscheinungen und unsere *Einsicht* in dieselben. — Die *Anzahl*

der beobachteten Erscheinungen ist — dank unserer verfeinerten Instrumente — von Jahr zu Jahr im Wachsen begriffen. Aber unsere *Einsicht* in diese Erscheinungen — wie *langsam*, wie *mühselig*, wie *unsicher* schreitet die fort!

Vor fünfzig Jahren glaubten Viele für die *elektrischen* Erscheinungen ein gewisses Verständnis sich erworben zu haben. Heut' zu Tage aber ist uns, durch Entdeckung neuer Tatsachen, klar geworden, daß wir noch nicht einmal einen sicheren *Anfangspunkt* für ein solches Verständnis erlangt haben.

Dazu kommt eine gewisse Verblendung und Überstürzung. Ebenso, wie man in früheren Jahrhunderten nach einer *Universal-Medicin* für sämtliche Krankheiten suchte, — ebenso glaubt man heutzutage nach einem *Universalprinzip* zur Erklärung sämtlicher Erscheinungen der Astronomie und Physik suchen zu sollen. — — — —

Und liegt es doch auf der Hand, daß wir *niemals* ein solches Universalprinzip finden werden. Denn gelänge es uns, ein solches zu entdecken, — so würde die Wissenschaft *vollendet* sein, ihr *Ende* erreicht haben. — Die Wissenschaft aber ist *unendlich*, ebenso wie Raum und Zeit *unendlich* sind.

Auch in dieser Beziehung dürften die mühsamen Arbeiten der Astronomen, z. B. auch die Arbeiten von Hansen und Scheibner, vorbildlich und beachtenswert sein. Sie zeigen uns, wie *behutsam* und *vorsichtig*, wie *geduldig* und *bescheiden* wir, den Naturerscheinungen gegenüber, aufzutreten haben, wenn wir die Aussicht haben wollen, zu *wirklicher Einsicht* zu gelangen.

Es sei mir noch erlaubt, einen Blick zu werfen auf Scheibners rein mathematische Arbeiten.

Die mathematische Wissenschaft wird von Vielen als *trocken* und *unerquicklich* angesehen. Auch wird man in der Tat nicht behaupten dürfen, daß sie zur Ergötzung müßiger Menschen angetan sei.

Aber ebenso, wie der sprudelnde Quell, und die wehende Luft uns *Lebensbedürfnis* sind, — ebenso ist auch das Nachdenken über diejenigen Dinge, die wir in ihrer Gesamtheit

als Mathematik zu bezeichnen pflegen, ein *Lebensbedürfnis* des Menschen.

Dafür spricht schon das hohe Alter der mathematischen Wissenschaft, welches nach Jahr*tausenden* rechnet; während manche andere Wissenschaft auf kaum ein Jahr*hundert* zurückblickt. Dafür spricht ferner der Umstand, daß in der mathematischen Wissenschaft, wenigstens in ihren wesentlichen Teilen, kein Veralten, kein Beiseitewerfen, sondern nur größere Vertiefung und feinere Durchbildung wahrzunehmen sind. Dafür spricht endlich, daß auch ihr Umfang in fortdauerndem Wachsen begriffen ist.

Scheibners Arbeiten dehnen sich aus fast über sämtliche Teile der Mathematik: Geometrie und Algebra, unendliche Reihen und Kettenbrüche, Zahlentheorie und Funktionentheorie, bestimmte Integrale und Potentialtheorie.

Von besonderer Schönheit ist Scheibners Arbeit über die *Gammafunktion*, als deren *Ausgangspunkt* eine gewisse sehr einfache Funktionalgleichung zu bezeichnen ist. Von diesem Prinzip ausgehend, gelangt Scheibner zu einer gewissen Aufeinanderfolge von Funktionen. Als ein *intermediäres Glied* in dieser Aufeinanderfolge tritt uns die Eulersche *Gammafunktion* entgegen, und als *Schlußglied* die Jacobische *Thetafunktion*.

Eine große Anzahl der Scheibnerschen Arbeiten bezieht sich auf die elliptischen und Abelschen Integrale, auf die soeben genannte Thetafunktion, sowie auch auf die Weierstrasssche Sigmafunktion.

Unter den betreffenden Scheibnerschen Arbeiten sind einige von *theoretischer* Wichtigkeit, andere aber von mehr *praktischer* Bedeutung. Diese praktische Bedeutung besteht nicht allein in ihrer Anwendbarkeit auf Aufgaben der Mechanik und Astronomie, der Physik und Technik, sondern namentlich auch darin, daß sie, durch eine geeignete Zusammenstellung und Vervollständigung des bereits in der Wissenschaft Vorhandenen, eine gute und sichere Grundlage liefern für weitere theoretische Forschungen.

In diesem Sinne kann man z. B. von der großen *prak-*

tischen Bedeutung derjenigen Arbeiten sprechen, welche Scheibner über die *elliptischen Integrale* geliefert hat. In den betreffenden Abhandlungen werden *zweckmäßige Methoden* angegeben, um diese Integrale auf solche erster, zweiter und dritter Gattung zu reduzieren; und um sodann diese letztern weiter zu reduzieren durch Anwendung der Theta- und Sigmafunktionen.

Im Verlaufe dieser Untersuchungen gelangt Scheibner zu der Überzeugung, daß von einer *Verdrängung* der Thetafunktionen durch die Sigmafunktionen nicht die Rede sein kann, noch auch von einer *Minderwertigkeit* der ersteren gegenüber den letzteren; — daß vielmehr beide Funktionenarten *nebeneinander* fortbestehen werden, daß jede Art ihre eigentümlichen Vorzüge besitze, sodaß man, je nach Umständen, bald von der einen, bald von der andern Funktionenart Gebrauch zu machen hat.

Von *rein theoretischer* Wichtigkeit sind Scheibners Untersuchungen über Doppelintegrale, ferner seine Untersuchungen über die Darstellbarkeit der Thetafunktionen durch unendliche Doppelsummen, und durch unendliche Doppelprodukte. Diese rein theoretischen Arbeiten sind anzusehen als eine weitere Fortsetzung der höchst interessanten Untersuchungen von Cayley, Eisenstein und Kronecker. — Cayley dürfte, wie Scheibner bemerkt, der Erste gewesen sein, der die Werte einer solchen unendlichen Doppelsumme, unter Zugrundelegung verschiedener Summationsgesetze, näher untersucht hat.

Charakteristisch für Scheibners mathematische Arbeiten ist das Bestreben, mit den *allereinfachsten Mitteln* auszukommen. Vielleicht hat ihn dieses Bestreben hin und wieder etwas zu weit geführt, indem er das schon von andern Mathematikern Gefundene *von neuem*, aber mit *einfacheren* Hilfsmitteln zu erreichen sich bemühte.

Charakteristisch für Scheibner ist ferner seine eminente Begabung sowohl für *analytische*, wie auch für *numerische* Operationen. Infolge dieser Begabung, und infolge der ihm angeborenen Vorsicht, dürfte in seinen Arbeiten wohl schwer-

lich ein Fehler zu entdecken sein. Und unter den hervorragenden Mathematikern, die viel publiziert haben, dürfte es wohl nur sehr wenige geben, von denen man Ähnliches behaupten kann.

Charakteristisch für Scheibner war ferner die Teilnahme an den Arbeiten seiner Freunde, sein reges Interesse auch für solche Teile der mathematischen Wissenschaft, die ihm verhältnismäßig fern lagen. — Er besaß (was man leider nicht hinreichend anerkannt hat) jene innere Höflichkeit, jene Höflichkeit des Herzens, die es liebt, den Freunden behilflich zu sein, und ihnen schwierige Arbeiten zu erleichtern. Ja diese *wahre* Höflichkeit ging bei ihm so weit, daß sie zuweilen sogar, auf Kosten seiner eignen wissenschaftlichen Überzeugung, sich betätigte.

Charakteristisch für Scheibner ist endlich aber auch die *gar zu große Kürze* seiner Ausdrucksweise. — Diese außerordentliche Kürze hat leider zur Folge gehabt, daß die Scheibnerschen Abhandlungen viel zu wenig bekannt geworden sind, und daß es häufig recht schwer ist in einer solchen Abhandlung die eigentlichen Grundzüge seiner schönen Untersuchungen herauszufinden.

Es dürfte hier am Orte sein, die rein mathematischen Abhandlungen Scheibners der Reihe nach anzuführen:

Über die Auflösung eines gewissen Gleichungssystems. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1856).

Zur Theorie der Maclaurinschen Summenformel (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1857).

Über das Flächenpotential. (Crelles Journal, Bd. 54, 1857).

Über Halbdeterminanten. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1859).

Über zwei auf die Theorie der elliptischen Funktionen bezügliche Sätze. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1859).

Über die Anwendung der Maclaurinschen Summenformel. (Als Zusatz zu einer Fechnerschen Arbeit in den Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1861, Seite 105).

Über periodische Funktionen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1862).

Über das Rationalmachen von irrationalen algebraischen Ausdrücken. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1863).

Einige Bemerkungen über rekurrierende Gleichungen, die auf Kettenbrüche führen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1864).

Über unendliche Reihen und deren Konvergenz. (Gratulations-Schrift; Leipzig, Verlag von Hirzel. 1868).

Über Mittelwerte. (Auszug aus einem an G. TH. FECHNER gerichteten Schreiben; Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1873).

Zur Reduktion elliptischer Integrale in reeller Form. (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1879, Seite 57.)

Supplement zur vorigen Abhandlung (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1880, Seite I—XLII).

Über eine Transformationsformel für Doppelintegrale (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1884, wiederabgedruckt in Crelles Journal Bd. 103, 1888).

Über Produkte von drei und vier Thetafunktionen. (Crelles Journal. Bd. 102, 1888).

Mathematische Bemerkungen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1888).

Die komplexe Multiplikation der Thetafunktionen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1888, und Math. Annal. Bd. 34, 1888).

Zur Reduktion elliptischer, hyperelliptischer und ABELscher Integrale. Das ABELsche Theorem für einfache und Doppelintegrale. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1889, und Math. Annal. Bd. 34, 1889).

Über den Zusammenhang der Thetafunktionen mit den elliptischen Integralen (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1889 Seite 86—109 und Seite 245—276; wiederabgedruckt in den Math. Annal. Bd. 34, 1889).

Über die Differentialgleichungen der elliptischen Modulfunktionen und Invarianten. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1889).

Über elliptische Doppelsummen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1890).

Über einige allgemeine Formen des elliptischen Differentials. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1891).

Über eine Methode von C. G. J. JACOBI zur Bestimmung des Restes unendlicher Reihen. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1893).

Zur Theorie des LEGENDRE-JACOBIschen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, insbesondere über zweiteilige komplexe Zahlen. I. und II. Abhandlung. (Abh. d. K. Sächs. G. d. W. 1900 und 1902).

Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. Erster und zweiter Teil. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1903 Seite 200—223 und Seite 322—383).

Dritter Teil. (Über Gleichungen fünften und sechsten Grades). (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1904 Seite 139—176. Ein Zusatz zu diesem dritten Teil findet sich in den Ber. 1904 Seite 311—321.)

Zur Theorie der TSCHIRNHAUS-Transformation (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1905).

Zur Auflösung der Ikosaeder-Gleichung. Erster und zweiter Teil. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1905 und 1906).

Über Möbius' Kreisverwandtschaft. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1906).

Zur linearen Transformation der Thetafunktionen und elliptischen Modulfunktionen (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1906).

Der Sturmsche Satz für Gleichungen fünften und sechsten Grades. (Ber. d. K. Sächs. G. d. W. 1907.)

Scheibner erreichte ein hohes Alter. Er wurde uns entrissen in seinem 82. Lebensjahr. Aber er wurde uns entrissen in voller geistiger Klarheit, in voller Tätigkeit, in voller Arbeit. Möge es vielen von uns beschieden sein, bis zum letzten Augenblick arbeiten zu können.

Wir blicken mit Bewunderung auf seine großen mühsamen und sorgfältigen Arbeiten. Und wir werden ihm stets dankbar bleiben für seine wertvollen Beiträge zu unsern Abhandlungen und Berichten.

Druckfertig erklärt 23. II. 1909.]

Protektor der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Exzellenz der Staatsminister Dr. *Kurt Damm Paul v. Seydewitz.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Rat *Ernst Windisch* in Leipzig, Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1910.
Geheimer Rat *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1910.
Geheimer Hofrat *Erich Bethe* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Professor *Erich Brandenburg* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Karl Bücher* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
Professor *August Fischer* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Kirchenrat *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Rat *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Richard Heinze* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Rudolf Hirzel* in Jena.
Professor *Albert Köster* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Karl Lamprecht* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *August Leskien* in Leipzig.
Professor *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Rat *Ludwig Mitteis* in Leipzig.
Professor *Eugen Mogk* in Leipzig.

Geheimer Regierungsrat *Joseph Partsch* in Leipzig.
Geheimer Oberschulrat *Hermann Peter* in Meißen.
Oberstudienrat *Wilhelm Roscher* in Dresden.
Geheimer Hofrat *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrat *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Eduard Sievers* in Leipzig.
Geheimer Rat *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Stieda* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Georg Treu* in Dresden.
Professor *Ulrich Wilcken* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Lujo Brentano* in München.
Geheimer Regierungsrat *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
Geheimer Hofrat *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
Professor *Friedrich Marx* in Bonn.
Geheimer Hofrat *Erich Marcks* in Hamburg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Karl Chun* in Leipzig, Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1909.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1909.
Geheimer Hofrat *Ernst Beckmann* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Biedermann* in Jena.
Geheimer Medizinalrat *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Geheimer Rat *Hermann Credner* in Leipzig
Professor *Theodor Des Coudres* in Leipzig.

Geheimer Hofrat *Oskar Drude* in Dresden.
Dr. *Wilhelm Feddersen* in Leipzig.
Professor *Otto Fischer* in Leipzig.
Geheimer Rat *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Hallwachs* in Dresden.
Geheimer Hofrat *Arthur Hantzsch* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Walter Hempel* in Dresden.
Geheimer Rat *Ewald Hering* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Knorr* in Jena.
Geheimer Hofrat *Martin Krause* in Dresden.
Professor *Max Le Blanc* in Leipzig.
Professor *Robert Luther* in Dresden.
Geheimer Medizinalrat *Felix Marchand* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ernst von Meyer* in Dresden.
Geheimer Rat *Wilhelm Müller* in Jena.
Geheimer Hofrat *Carl Neumann* in Leipzig.
Wirklicher Staatsrat *Arthur v. Oettingen* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Ostwald* in Groß-Bothen.
Geheimer Rat *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Karl Rabl* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Karl Rohn* in Leipzig.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrat *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrat *August Töpler* in Dresden.
Geheimer Hofrat *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rat *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rat *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Außerordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Professor *Karl Correns* in Leipzig.
Professor *Johannes Felix* in Leipzig.
Professor *Felix Hausdorff* in Leipzig.
Professor *Hans Held* in Leipzig.
Professor *Max Siegfried* in Leipzig.
Professor *Hans Stobbe* in Leipzig.
Professor *Otto zur Strassen* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Professor *Friedrich Engel* in Greifswald.
Geheimer Regierungsrat *Felix Klein* in Göttingen.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Klasse.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Berger, Hugo, 1904.
Böhtlingk, Otto, 1904.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebers, Georg, 1898.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleckeisen, Alfred, 1899.
Fleischer, Heinr. Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gebhardt, Oscar von, 1906.
Gelzer, Heinrich, 1906.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Hultsch, Friedrich, 1906.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Krehl, Ludolf, 1901.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.

Miaskowski, August von, 1899.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Mommsen, Theodor, 1903.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Overbeck, Johannes Adolf, 1895.
Pertsch, Wilhelm, 1899.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ratzel, Friedrich, 1904.
Ribbeck, Otto, 1898.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876
Rohde, Erwin, 1898.
Roscher, Wilhelm, 1894.
Ruge, Sophus, 1903.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Schrader, Eberhard, 1908.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Socin, Albert, 1899.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Voigt, Moritz, 1905.
Wachsmuth, Curt, 1905.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Klasse.

Abbe, Ernst, 1905.
d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Carus, Julius Victor, 1903.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Gegenbaur, Carl, 1903.
Geinitz, Hans Bruno, 1900.
Hankel, Wilhelm Gottlieb, 1899
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
His, Wilhelm, 1904.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Leuckart, Rudolph, 1898.
Lie, Sophus, 1899.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig, Carl, 1895.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mayer, Adolf, 1908.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.

Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Richthofen, Ferdinand v., 1905.
Scheerer, Theodor, 1875.
Scheibner, Wilhelm, 1908.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schlömilch, Oscar, 1901.
Schmitt, Rudolf Wilhelm, 1898.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Wiedemann, Gustav, 1899.
Winkler, Clemens, 1904.
Wislicenus, Johannes, 1902.
Zeuner, Gustav Anton, 1907.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. Dezember 1908.

Verzeichnis

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1908 eingegangenen Schriften.

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1907. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1907, No. 39—53. 1908, No. 1—39. Berlin d. J.

Acta Borussica: Die Behördenorganisation und die allgemeine Staatsverwaltung Preußens im 18. Jahrhundert. Bd. 4, I., II. 9. Berlin 1907. 08. — Das preußische Münzwesen im 18. Jahrhundert. Berlin 1908.

Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen. Bd. 32. Berlin 1908.

Winnefeld, Herm., Hellenistische Silberreliefs im Antiquarium der Königlichen Museen. 68. Programm zum Winckelmannsfeste der archäologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1908.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 41, No, 1—18. Berlin 1908.

Die Fortschritte der Physik im J. 1907. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 63. Abt. 1—3. Braunschweig 1908.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 9, No. 24. Jahrg. 10, No. 1—21. Berlin 1907. 08.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 21 (Jahrg. 1907), No. 20—26ª. Bd. 22 (Jahrg. 1908), No. 1—18. — Bibliographia physiologica. Ser. III. Bd. 3. No. 2—4. Bd. 4, No. 1. Berlin 1907. 08.

Abhandlungen der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt N., F. H. 4 (mit Atlas) 30. 36. 52. 54. 55. Berlin 1900—08.

Jahrbuch der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt und Bergakademie für das Jahr 1904. Bd. 25. Berlin 1907.

Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1907. S.-A. Berlin d. J.

Kammerer, Werkzeug und Arbeitsteilung. Rede in der Halle der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1908.

Bonner Jahrbücher. Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinlande. H. 116, III, 117, I. II. Bonn 1907. 08.

Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig für die Vereinsjahre 1905/6 u. 1906/7. Braunschweig 1908.

Fünfundachtzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. 1907. Breslau 1908.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 12. H. 2. Danzig 1908. — 30. Bericht des westpreußischen botanisch-zoologischen Vereins. Ebd. 1908.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1903 u. 1904. Dresden 1908.

Dekaden-Monatsberichte der Kgl. Sächs. Landes-Wetterwarte. Jahrg. 9 (1906), 10 (1907). Dresden 1906. 08.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Jahrg. 53, No. 2. Jahrg. 54, No. 1. Dresden 1907. 08.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsper. 1906/07, 1907/08. München 1908.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1906, Jan.—Juni. 1907, Jul.—Dez. 1908, Jan.—Juni. Dresden d. J.

Verzeichnis der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1908 u. Wintersem. 1908/09. — Personalverzeichnis der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule f. d. Wintersem. 1908/09. — Bericht über die Kgl. Sächs. Technische Hochschule 1906/07. Dresden 1908.

Die Siegel des Adels der Wettiner Lande bis zum Jahre 1500. Hrg. von *O. Posse*. Bd. 3. Dresden 1908.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 23, Jahrg. 64. Dürkheim a. d. H. 1907.

Mosler, H., Die Einführung der Rheinschiffahrtsoktroi-Konvention am deutschen Niederrhein. (Hrg. vom Düsseldorfer Geschichtsverein) Düsseldorf 1908.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt. H. 28. Erfurt 1907.

Abhandlungen hrg. von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Bd. 13—30,3. Frankfurt a. M. 1883—1908.

Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft. 1870/71. 1876/77—95. 1897—1903. 1905—08.

Festschrift zur Erinnerung an die Eröffnung des neuerbauten Museums der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft, 13. Okt. 1907. — Kataloge des Museums: *O. Boettger*, Batrachier (1892). Reptilien T. 1, 2 (1893. 98). *E. Hartert*, Vögel (1891). *W. Kobelt*, Säugetiere (1896). — *L. v. Heyden*, Die Käfer von Nassau und Frankfurt 2. Aufl. (1904). — *W. Kobelt*, Reiseerinnerungen aus Algerien und Tunis. Frankfurt a. M. 1885.

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für d. Rechnungsjahr 1906/07. Frankfurt 1908.

Helios. Organ des naturwissenschaftlichen Vereins des Regierungsbezirks Frankfurt. Jahrg. 24/25. Berlin 1908.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1908/09. Freiberg 1908.

Verzeichnis der Vorlesungen auf der Großherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Gießen. Sommer 1908, Winter 1908/09; Personalbestand. Winter 1907/08. Sommer 1908. Satzungen, Prüfungs- und Promotionsordnungen, Studienpläne. — Zur Erinnerung an die 3. Jahrhundertfeier der Großherz. Landesuniversität, 31. Juli—3. August 1907. — *H. Oncken*, Der Hessische Staat und die Landesuniversität Gießen (Progr.). — 134 Dissertationen aus den Jahren 1907/08.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Klasse. Bd. 10. No. 1—5. Bd. 11. No. 1. Math.-phys. Klasse. Bd. 5. No. 1—5. Bd. 6. No. 1—3. Bd. 7. No. 1. 2.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1907, No. 4. 5. 1908, No. 1—3. Philol.-hist. Kl. 1907, No. 3. 1908, No. 1—5. — Geschäftliche Mitteilungen. 1908, H. 1. 2. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1907/08. Grimma 1908.

Leopoldina. Amtl. Org. d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 43, No. 12. H. 44, No. 1—11. Halle 1907. 08.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen (in Halle). Bd. 79. H. 3—6. Bd. 80. H. 1. 2. Stuttgart 1907. 08.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 4. H. 8. Leipzig 1908.

Mitteilungen der Hamburger Sternwarte No. 9. 10. Hamburg 1905.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Hrg. vom hist.-philos. Verein zu Heidelberg. Jg. 15. Heidelberg 1908.

Publikationen des astrophysikalischen Instituts Königstuhl-Heidelberg. Herausg. von *Max Wolf*. Bd. 3. No. 4. Karlsruhe 1902. 06.

Mitteilungen der Großherzoglichen Sternwarte zu Heidelberg. Bd. 10 bis 12. Leipzig und Karlsruhe 1907. 08.

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Herausg. vom Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika Dar-es-Salâm. Bd. 3. H. 4. Heidelberg 1908.

Fridericiana. Großherz. Badische Technische Hochschule zu Karlsruhe. Programm für 1908/09. — *E. Arnold*, Experimentelle Untersuchung der Kommutation bei Gleichstrommaschinen (Festschrift). — *Th. Rehbock*, Der wirtschaftliche Wert der binnenländischen Wasserkräfte (Rektoratsrede). — *Derselbe,* Akademische Gedächtnisfeier für S. Kgl. Hoheit den verewigten Großherzog Friedrich von Baden. — 18 Dissertationen aus den Jahren 1907/08.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1907/08. — Verzeichnis der Vorlesungen. Winter 1907/08, Sommer 1908. — *A. Hänel,* Das zweite Ministerium des Freiherrn von Stein (Rede). — *P. Harzer*, Die Sterne und der Raum (Rede). — 84 Dissertationen aus den Jahren 1807/08.

Astronomische Abhandlungen. No. 15. Kiel 1908.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und

der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirtschaft, Domänen usw. N. F. Abteilung Helgoland. Bd. 8. H. 2. Abt. Kiel. Bd. 10. Kiel und Leipzig 1908.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 48 (1907). Königsberg 1908.

13. und 14. Jahresbericht des Instituts für rumänische Sprache. Hrg. von *H. Weigand.* Leipzig 1908.

Das städtische Gymnasium zu St. Nikolai in Leipzig. Bericht über das Schuljahr 1907/08. Leipzig 1908.

Zeitschrift des Vereins für Lübeck Geschichts- und Altertumskunde. Bd. 9. H. 2 u. Beilage Bd. 10. H. 1. Lübeck 1908.

Jahresbericht und Abhandlungen des naturwiss. Vereins zu Magdeburg. 1904—07. Magdeburg 1907.

Zeitschrift des Vereins zur Erforschung der rheinischen Geschichte und Altertümer. N. F. Jahrg. 3. Mainz 1908.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule Meißen. 1907/08. Meißen 1908.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1907 H. 3. 1908, H. 1. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1907, H. 3. 1908, Abh. 1—6. München d. J.

49. Plenarversammlung der historischen Kommission bei der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. Bericht des Sekretariats.

Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik. Führer durch die Sammlungen. Leipzig 1907.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 23. H. 2. Bd. 24, H. 1. München 1907. 08.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1907. Hft. 1—4. Nürnberg d. J.

Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 17. 1. Beigabe. — Jahresbericht f. 1905. Nürnberg 1906.

Mitteilungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Jahrg. 1 (1907), 2 (1908) No. 1.

Mitteilungen des Altertumsvereins zu Plauen i. V. 19. Jahresschrift a. d. J. 1908/09 und Beilageheft. Plauen 1908.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 8, No. 1—12. Posen 1907.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 22. Posen 1907.

Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 34—38. Berlin 1908.

Centralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. No. 3—7. 9. 11. 12. 16. Berlin 1901—08.

Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 18, St. 3. Bd. 20. St. 1. Potsdam 1908.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 17 (1908). Stuttgart d. J.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 57, 2. Bd. 58, 1—3. Berlin 1907. 08.

Zuwachs der Großherz. Bibliothek zu Weimar in den Jahren 1905 bis 1907. Weimar 1908.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 61. Wiesbaden 1908.

Sitzungsberichte der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1907, No 3—7. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 39, No. 3—7. Bd. 40, No. 1. Würzburg 1908.

Österreich-Ungarn.

Codex diplomaticus Regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae. Vol. 5. Zagreb (Agram) 1907.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti (Agram). Svez. 22. 1907. U Zagrebu 1908.

Građa za povjest kńiževnosti hrvatasko na svijet izdaje Jugoslav. Akadem. znanosti i umjetnosti. Kń. 5. U Zagrebu 1907.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 31. Zagrebiae 1908.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Kń. 97. 170—173. U Zagrebu 1889. 1907. 08.

Mažuranic, V. Prinosi za hrvaski pravno-povjestni rječnik. Svez. 1. U Zagrebu 1908.

Vjesnik hrvatskoga arheološkoga Društva. God. 6 Sv. 2, N. S. Sv. 10, Sv. 2—4. U Zagrebu 1884. 1908.

Vjesnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskog zemaljskog arkiva. God. 10. Svez. 1. U Zagrebu 1908.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Kń. 13, Svez. 1, U Zagrebu 1908.

Starine na svijet izdaje Jugoslav. Akadem. znanosti i umjetn. Kéj. 19. 21. 32. U Zagrebu 1887. 89. 1907.

Zeitschrift des Mährischen Landesmuseums. Herausg. von der Mährischen Museumsgesellschaft (Deutsche Sektion). Bd. 8, H. 1. 2. — Časopis Moravského musea zemského. Roćn. 8. Brünn 1908.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach. 1908. Budapest d. J.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wiss. herausg. Bd. 1. 21. 22. Budapest 1883. 1907.

Ertekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 19, Sz. 10. Köt. 20, Sz. 1—7. Budapest 1907. 08.

Értekezések a Társadalmi Tudományok Köréből. Köt. 13, Sz. 9. Budapest 1907.

Értekezések a Történeti Tudományok Köréből. Köt. 21, Sz. 5—6. Budapest 1907. 08.

Archaeologiai Ertesitő. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 27, Sz. 3—5. Köt. 28, Sz. 1. 2. Budapest 1907. 08.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 25, Füz. 2—5. Köt. 26, Füz. 1. 2. Budapest 1907. 08.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 29, Sz. 3. 4. Köt. 30, Füz. 1—3. Budapest 1907. 08.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 37, Füz. 3.4. Budapest 1907.

Monumenta Hungariae historica. Köt. 32. 33. Budapest 1906. 07.

Nyelvtudomany a Magyar. tudom. Akad. Köt. 1, Füz. 4. Köt. 2, Füz. 1. Budapest 1907. 08.

Rapport sur les travaux de l'Académie Hongroise des sciences en 1907. Budapest 1908.

Editiones criticae scriptorum graecorum et romanorum a collegio philologico classico Acad. litt. Hungaricae publ. juris factae: Scholia recentia in Pindari Epinicia. Ed. *Eug. Abel.* Vol. 1. Budapesti et Berolini 1891. — Scholia in Nicandri Alexipharmacae cod. Gottingensi ed. recens. ab *Eug. Abel*, ad finem perduxit *Rud. Vári.* ib. 1892. — A. Persii Flacci Satirae. Ed. *Geyza Némethy.* Budap. 1903.

Magyarországinémet nyelvjárások. Füz. 5. 6. Budapest 1907. 08.

Nyelvemléktár Régi Magyar Kodexek és nyomtat ványok. Köt. 15. Budapest 1908.

Fabó Bertalan, A magyar népdal zenei fejlödése. Budapest 1908.

Hampel József, A konfoglalási kor emlékeiröl. Budapest 1907.

Budapest Régiségei. 9. Budapest 1906.

Comptes rendus des séances de la I. et II. Réunion de la Commission permanente de l'Association internationale de Sismologie, 1906, 07. (Budapest), Rome, La Haye.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1908. — Personalstand 1907/08.— Die feierliche Inauguration des Rektors f. d. Studienjahr 1907/08.

Mitteilungen des naturhistorischen Vereins für Steiermark. H. 43. 1. 2. (1906). Graz 1907.

Zeitschrift des historischen Vereins für Steiermark. Jahrg. 5 (1907). H. 1—4. Graz 1907.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. 3. Flge. H. 51. Innsbruck 1907.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Math.-naturw. Cl. 1907, No. 4—10. 1908, No. 1—8. Philol. Cl. 1907, No. 4—10. 1908, No. 1—5. Krakau d. J.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. Tom. 13, Vol. 1. P. 1. W Krakowie 1908.

Collectanea ex Archivis Collegii Juridici. Tom. 8, P. 1. Kraków 1907.

Monumenta medii aevi historica. Tom. 16. 18. W Krakowie 1901. 08.

Biblioteka pisarzów Palskich. No. 54. Kraków 1907.

Biblioteka przekładów z literatury starożytnejn. 2. 3. W Krakowie 1907. 08.

Atlas geologiczny Galicyi. Zesz. 17 (Text). 21 (Text, Atlas). W Krakowie 1905. 08.

Katalog literatury naukowej polskiej. Tom 7 (1907), zesz. 3. 4. Krakow 1907.

Rocznik Akademii umiejętności W Krakowie. Rok 1906/07. W Krakowie 1907.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydział filologiczny. T. 44. (Ser. II. T. 29) — Wydział. hiztor.-filozof. T. 49. 50 (Ser. II. T. 24. 25). — Wydział matemat.-przyrodniczego. T. 47. (Ser. III. T. 7). W Krakowie 1908.

Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 7, Index. T. 8, zesz. 1. 2. Kraków 1906. 07.

Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom. 40. 41. Kraków 1907. 08.

Materiały i prase komisyi językowej Akad. umiej. Tom. 2, zesz. 2. 3. W Krakowie 1907.

Grabowski, Tad., Literatura Argańska w Polsce 1560—1660. Krakow 1908.

Karłowicz, Jan., Słownik qwar Polskich. Tom. 5 Kraków 1907.

Prochaska, Ant., Król Władystaw Jagiello. Tom. 1. 2. W Krakowie 1908.

Sobieski, Wacław, Henryk IV wobec Polski i Szwecyi 1602—1610.

Wadowski, Ks. Jan. Ambr., Kościoły Iubelskie. Kraków 1907.

Mitteilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 1. 20, 1—6. Laibach 1866. 1907.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 17. V Ljubljani 1907.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. H. 31. 32. Lemberg 1907.

Sammelschrift der mathem.-naturw.-ärztl. Sektion der Ševčenko-Gesellschaft. Bd. 8. H. 2. Lemberg 1902.

Kwartalnik etnograficzny „Lud“. T. 13, zesz. 3. 4. T. 14, zesz. 1—3. W Lwowie 1907. 08.

České Akademie Cisaře Františka Josefa. Almanach. Ročn. 18. V Praze 1908.

Archiv pro lexikografii a dialektologii. Čisl. 7. Praze 1907.

Bulletin international. Resumé des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine. Ann. 11 (1906). Prague 1906.

Rozpravy české Akad. Třida I. Čisl. 37. — Třid. II. Ročn 16. ib. 1907.

Sbírka Pramenů ku poznáni literárního života. Skup. I, Řada II, Čisl. 3. 1901. Skup. II. Čisl. 3. 10. 1897. 1907.

Věstnik česk. Akad. Ročn. 16. ib. 1907.

Němec, B. Anatomie a fisiologie rostlin. Čest. 1. ib. 1907.

Truhlář, Jos., Katalog čestých rukopisů. ib. 1906.

Valenovský, Jos., Všeobecná Botanika. Skovnávací morfologie. Dil I. II. ib. 1907.

Zíbrt, Čeněk, Bibliografie česke historie. Díl 4, Svaz 1. ib. 1907.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1907. Prag 1908.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse Jahrg. 1907. — Philos.-histor.-philolog. Klasse Jahrg. 1907. Prag 1908.

Vejdovský, F., Neue Untersuchungen über die Reifung und Befruchtung. Prag 1907.

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Im Auftrag der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen hrg. Bd. 7. 8. Prag 1907. 08.

Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 3. 20. Prag 1900. 08.

Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit der Gesellschaft zur Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. 1907. Prag 1908.

Archiv český čili staré pisemné památky České i Moravské. Díl 24. V Praze 1908.

59. Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1907. Prag 1908.

Böhm, Jos. Geo., Die Kunstuhren auf der k. k. Sternwarte zu Prag. Hrg. von *L. Weinek.* Prag 1908.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1907. Jahrg. 68. Prag 1908.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 46, No. 1—4. Prag 1907/08.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 30 (1907), No. 1—12 Spalato 1907.

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 57. Wien 1907.

Anzeiger der Kais. Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Kl. Jahrg. 44 (1907). No. 1—27. Wien d. J.

Archiv für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Kommission der Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 98, I. Wien 1908.

Denkschriften der Kais. Akademie d. Wissensch. Mathem.-naturw. Kl. Bd. 79, I. Wien 1908.

Schriften der Balkankommission. Antiquarische Abteilung. III—V. — Linguistische Abteilung. IV—VIII. Wien 1904—07.

Fontes rerum Austriacarum. Österreichische Geschichtsquellen, hrg. von der histor. Kommission der Kais. Akademie der Wissensch. Abt. II. Bd. 60. Wien 1907.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Kl. Bd. 110 (1907) I, No. 6—10. II^a, No. 7—10. II^b, No. 7—10. III, No. 7—10. Bd. 117 (1908) I, No. 1—4. II^a, No. 1—6. II^b, No. 1—6. III, No. 1—5. — Philos.-histor. Kl. Bd. 155, Abh. 4. Bd. 156, Abh. 4. 5. Bd. 157, Abh. 5—7. Bd. 158, Abh. 1—3. 5. Bd. 159, Abh. 1—7. Bd. 160, Abh. 1. Bd. 161, Abh. 1. 2. Wien 1907. 08.

Abhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 4. H. 4 Wien 1908.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 57, H. 8—10. Bd 58, H. 1—7. Wien 1907. 08.

Verhandlungen der österreich. Gradmessungs-Kommission. Protokoll über die am 26. März 1907 abgehaltene Sitzung. Wien 1907.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 21, No. 3. 4. Bd. 22, No. 1. Wien 1906. 07.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 16, H. 2. Wien 1907.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 57 (1907), H. 4. Jahrg. 58 (1908), H. 1—3. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1907, No. 11—18. Jahrg. 1908, No. 1—14. Wien d. J.

Mitteilungen der Sektion f. Naturkunde des Österreichischen Touristen-Club. Jahrg. 19. Wien 1907.

Publikationen der v. Kufferschen Sternwarte, Bd. 6, Teil 5. Wien 1908.

Ball, L. de, Die Theorie der Drehung der Erde. S.-A. (Publication der v. Kuffer'schen Sternwarte) 1907.

Belgien.

Académie Royale d'archéologie de Belgique. Bulletin. 1907, 3—5. 1908, 1—4. Anvers d. J.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1908. (Année 74). Bruxelles d. J.

Académie Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 1907, No. 9—12. 1908, No. 1—8. — Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. 1907, No. 9—12. 1908, No. 1—8. — Mémoires. Classe des sciences. Collect. in 8°. Tom. 2, Fasc. 3. Collect. in 4°. Tom. 1, Fasc. 5. — Classe des lettres et des sciences morales et politiques. Collect. in 8°. Tom. 3, Fasc. 2. Tom. 4, Fasc. 1. Collect. in 4°. Tom. 2. Bruxelles 1907. 08.

Analecta Bollandiana. T. 27, Fasc. 1—4. Bruxelles 1908.

Annales de la Société entomologique de Belgique. Tom. 51. Bruxelles 1907.

Bulletin de la Société Roy. de Botanique de Belgique. Tom. 42. Fasc. 3. Tom. 44, Fasc. 1—3. Bruxelles 1906. 07.

Mémoires de la Société entomologique de Belgique. 15. 16. Bruxelles 1908.

Annales de la Société Roy. zoologique et malacologique de Belgique. Tom. 40—42. Bruxelles 1905—07.

Annales de l'Observatoire Roy. de Belgique. N. Sér. Annales astronomiques. Tom. 10, 11, Fasc. 1. — Physique du Globe. Tom. 3, Fasc. 3. Bruxelles 1907.

Annuaire astronomique de l'Observatoire Roy. de Belgique pour 1908.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 24, Fasc. 2. Louvain 1907.

Bulgarien.

Godisnik na Sofiiskija Universitet. Annuaire de l'Université de Sofia. 2. 1905/06. Sofia 1906.

Dänemark.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 7. Række. Bd. 1, No. 1. 2. Naturv. og math. Afd. 7. Række Bd. 4, No. 3—5. Bd. 6, No. 1. Kjøbenhavn 1907. 08.

Oversigt over det Kong. Danske Videnscabernes Selskabs Forhandlinger i aar. 1907, No. 3—6. 1908, No. 1—3. Kjøbenhavn 1907. 08.

Regesta diplomatica historiae Danicae. Ser. II. Bd. 2, VI. ib. 1907.

Anecdota cartographica septentrionalia ed. *Axel Bjornbo - Carl S. Petersen.* Hauniae 1908.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer. Bulletin trimestriel. Année 1906/07. No. 3. 4. — Publications de circonstance. No. 42. — Bulletin statistique des pêches maritimes des pays du Nord de l'Europe. Vol. 2. Copenhague 1907. 08.

England.

Aberdeen University Studies. No. 25—30. Aberdeen 1907.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 14, P. 4—6. Cambridge 1908.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 20, No. 15. 16. Vol. 21, No. 1—6. Cambridge 1908.

Proceedings of the R. Irish Academy. Vol. 27. Sect. A, P. 3—9. Sect. B, P. 1—5. Sect. C, P. 1—8. Dublin 1907. 08.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 11, P. 21—28. Dublin 1908.

Economic Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 1, P. 12. Dublin 1908.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 28, No. 1—9. Vol. 29, No. 1. Edinburgh 1908.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 45, P. 4. Vol. 46, P. 1. Edinburgh 1908.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 17, P. 4. Edinburgh 1908

Transactions of the Edingburgh Geological Society. Vol. 9, P. 2. Edinburgh 1908.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 22. Liverpool 1908.

Proceedings of the Roy. Institution of Great Britain. Vol. 18, 2 (No. 100). London 1907.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 80. 81. A. No. 536—549. B. No. 536—543. Yearbook of the Royal Society 1908.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. Ser. A. Vol. 207, p. 307—599. Vol. 208. 209, p. 1—203. Ser. B. Vol. 199, p. 281—425. Vol. 200, p. 1—240. London 1902—07.

Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. II. Vol. 5, P. 3—7. Vol. 6, P. 1—6. London 1907. 08.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1908, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 52, P. 1—3. Manchester 1908.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1894. 1900/01. 01/02. 04/05. 05/06. — Notes. No. 7. 8. (1901. 02). — Museum Handbooks: *Will. E. Hoyle,* Handy Guide to the Museum. 3. edit. 1903. — *B. Hobson,* Correlation Tables of British Strata. 1901. — *H. Bolton,* Supplementary List of Type Fossils. Manchester 1894.

The Victoria University of Manchester. Calendar. 1908/09. — Publications of the University of Manchester: Economic Series. No. 8—10. Educational Series. No. 1—3. — Historical Series. No. 7. — Classi-

cal Series. No. 1. — Medical Series. No. 8—10. — University Lectures. No. 8. — Acting Edition of the Mostellaria of Plautus Ed. by G. Norwood. — Register of graduates up to July 1903. 3. edit. Manchester 1907. 08.

Frankreich.

Annales des Facultés de Droit et des Lettres d'Aix. Droit. T. 1. Lettres. T. 1. Aix 1907.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1906/07. Paris et Bordeaux 1907.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1906 à Mai 1907. Note de *G. Rayet.* Bordeaux 1907.

Catalogue de la Bibliothèque de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. P. II, Liv. 1. Cherbourg 1873.

Revue d'Auvergne et Bulletin de l'Université de Clermont-Ferrand. Ann. 25, No. 3. 4. Clermont-Ferrand 1908.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles lettres et arts de Lyon. Science et lettres. Sér. III T. 9. Paris et Lyon 1907.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 20. 21. 23. Droit, Lettres, Fasc. 19. Paris et Lyon 1907. 08.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 16. Marseille 1908.

Académie des sciences et lettres de Montpellier: Mémoires de la section des lettres. Sér. II. T 3, No. 3. T. 5, No. 1. — Mémoires de la section de médecine. Sér. II. T. 2, No. 3. — Mémoires de la section des sciences. Sér. II. T. 3, No. 5—8. Montpellier 1906—08.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Sér. III. T. 8, Fasc. 1—3. T. 9, Fasc. 1. Paris et Nancy 1907. 08.

Institut de France. Annuaire pour 1907. 08. Paris.

Oeuvres complètes d'*Augustin Cauchy*. Publ. sous la direction scientifique de l'Académie des sciences. Sér. I. T. 2. Paris 1908.

Comité international des poids et mesures. Procès verbaux des séances. Sér. II. T. 4. Session de 1907. Paris.

Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. 13. Paris 1907.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1907, No. 4—7. 1908, No. 1—4. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 24, No. 11. 12. T. 25, No. 1—10. Paris 1907. 08.

Journal de l'École polytechnique. Sér. II. Cah. 11. Paris 1908.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 33, No. 3. T. 36. No. 1—4. Paris 1905. 08.

Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'Ouest. T. 15. 16. 17, No. 1. Rennes 1906—08.

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. Ann. 19. No. 74—76 Ann. 20. No. 77. 78. — Bibliothèque méridionale. Sér. I, No. 11. Sér. II, No. 11. 12. Toulouse 1907. 08.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Sér. II. T. 9, Fasc. 2—4. T. 10, Fasc. 1. Paris et Toulouse 1907. 08.

Annales de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse. T. 7. Toulouse, Paris 1907.

Bulletin de la Commission météorologique du Department de la Haute Garonne.. T. I, Fasc. 5 (1905). Toulouse 1907.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique [Athen]. Année 26, 7—12. Ann. 31, 8—12. Ann. 32, 1—12. Paris 1902. 07. 08.

Mitteilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abteilung. Bd. 32, H. 4. Bd. 33, H. 1—3. Athen 1907. 08.

Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθηναῖς Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T. 19, No. 3. 4. T. 20, No. 1—3. Athen 1907. 08.

Ἐθνικὸν πανεπιστήμιον, Τὰ κατὰ τὴν Πρυτανείαν Πρυτανεύσαντος κατὰ τὸ Ἀκαδημιακὸν ἔτος 1905—07.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1907. Amsterdam 1908.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde II. Reeks. Deel 8, No. 4. 5. Deel 9. 10, No. 1. — Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 9, No. 5—7. Sect. II. Deel 13, No. 4—6. Deel 14, No. 1. Amsterdam 1907. 08.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 16. I. II. Amsterdam 1907. 08.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1909. — *Casoli, Alph.*, Ad conventum Hagensem de pace publica. Carmen in certamine poetico Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Acced. 4 carmina laudata. Amstelodami 1908.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 16, P. 1. 2. — Table des matières cont. dans les Vol. 11—15. Amsterdam 1908.

Index du Répertoire bibliographique des scienses mathématiques. Nouv. édit. Amsterdam, Paris 1908.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 2. 4, St. 4. Deel 5, St. 4. Deel 8, St. 2. 3. Amsterdam 1896—1908. — Programma van jaarl. prijsvragen voor het jaar 1898—1908. — Wiskundige opgaven. Deel 6, St. 1. Deel 8, St. 1. Deel 10, St. 1—3. ebd. 1893—1908.

Verslag van de 118. 119. 121—123. 126. Algemeene Vergadering van het Wiskundige Genootschap. Amsterdam 1898 - 1905.

Technische Hoogeschool te Delft: 2 Dissertationen a. d. J. 1908.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 13, Livr. 1—5. Harlem 1908.

Natuurkundige Verhandelingen van h. Holl. Maatschappij d. wetenschappen. Derde Verzam. Deel 6, St. 3. 4. Haarlem 1907.

Oeuvres complètes de *Christian Huygens*. Publ. par la Société Holland. d. sciences. T. 11. La Haye 1908.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 11, P. 2. Harlem 1908.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1907/08. Leiden 1908.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1907/8. Leiden 1908.

Tijdschrif voor Nederlandsche taal-en letterkunde. Uitgeg. vanwege de Maatschapp. d. Nederl. Letterkunde. Deel 26, Afd. 3. 4. Deel 27, Afd. 1. 2. Leiden 1907. 08.

Nederlandsch kruidkundig Archief, Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging [Leiden] Nijmegen 1907.

Recueil des travaux botaniques Néerlandais. Publ. par la Société botanique Néerlandaise. Vol. 4. Liv. 3. 4. Vol. 5, Liv. 1. Nijmegen 1907. 08.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad., gehouden d. 2. Jun. 1908.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergad. van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 3. Jun. 1908.

Bidragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 29. Amsterdam 1908.

Werken van het Histor. Genootschap. gev. te Utrecht. Ser. III. 13. Amsterdam 1908.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. V. Reeks. 9. Utrecht 1908.

Recherches astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht. 3. Utrecht 1908.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 84—95. Firenze 1907. 08.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. Ser. III. Vol. 4. Acireale 1908.

Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. VI. T. 4. Bologna 1907.

Rendiconto delle sessioni della R. Accad. dell' Istituto di Bologna. N. S. Vol. 11. Bologna 1907.

Memoire della R. Accademia delle scienze del' Istituto di Bologna. Classe di scienze morali. Ser. I. T. 1. Sezione di scienze giuridiche. Fasc. 1. Sez. di scienze storico-filologiche Fasc. 1.

Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle scienze del Istituto di Bologna. Classe d. scienze morali. Ser. I. Vol. 1, Fasc. 1. Bologna 1908.

Bollettino delle sedute della Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. Ser. II. Fasc. 1—4. Catania 1907.

Terzo Centenario della nascita di Evangelista Torricelli 1608—1908 Due insigni autografi di Galileo Galilei e Evangelista Torricelli. Firenze 1908.

Atti della R. Accademia Peloritana. Vol. 22, Fasc. 1. 2. — Resconti delle tornate delle classi. Marz. — Giugn. 1907. Messina.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II. Vol. 40, Fasc. 17—20. Vol. 41, Fasc. 1—16. Milano 1907. 08.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. 21. Fasc. 6. 7. — Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. 20. Fasc. 10. Milano 1908.

Raccolta Vinciana presso l'Archivio storico del comune di Milano. Fasc. 4. Milano 1907/08.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola. Vol. 21. Milano 1908.

Società Reale di Napoli. Atti della R. Accad. delle scienze fisiche et matematiche. Ser. II. Vol. 13. Rendiconto. Vol. 13 (Anno 46), Fasc. 11. 12. Vol. 14 (Anno 47), Fasc. 1—7. Napoli 1907. 08.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 25, Fasc. 1—3. T. 26, Fasc. 1. 2. — Suppl. Vol. 2, No. 5/6. Vol. 3, No. 1—4. Annuario. 1908. Indice delle Pubblicazioni 1—26. Palermo 1907. 08.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 17, No. 2—5. Pisa 1907. 08.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V. Notizie degli scavi. Vol. 4, Fasc. 7—12. Vol. 5, Fasc. 1—8. Rendiconti. Vol. 16 (1907), Fasc. 6—12. Vol. 17 (1908), Fasc. 1—6. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Ser. V. Memorie. Vol. 6, Fasc. 13—17. Rendiconti. Vol. 16 (1907), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 17 (1908) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—10. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 7. Giugn. 1908. — Biblioteca della R. Accademia dei Lincei. Elenco Bibliografico delle Accademie, Società, Istituti etc. corrispondenti con la R. Accad. dei Lincei. Roma 1907. 08.

Mitteilungen des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 22, H. 3. 4. Bd. 23, H. 1. Roma 1907. 08.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 10, No. 1—5. Vol. 11, No. 1—3. Vol. 17, No. 1—4. Vol. 19, No. 7—10. Vol. 20, No. 1—6. Siena 1898—1908.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 43, Disp. 1—15. Torino 1908.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 58. 1908.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1907 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1908.

Atti del R. Istituto Veneto. Vol. 65. 66. 67, No. 1—5. Venezia 1905—08.

Memorie del R. Istituto Veneto. Vol. 27, No. 6—10. Vol. 28, No. 1. Venezia 1906. 07.

Osservazioni meteorologiche e geodinamiche eseguite nell' anno 1906 nell' osservatorio del Seminario patriarcale di Venezia. Venezia 1907.

Luxemburg.

Institut Gr.-Duc. de Luxembourg. Section des sciences naturelles, physiques et mathématiques. Archives trimestrielles. N. S. T. 2. 3. Luxembourg 1908.

Portugal.

Annaes scientificos da Academia politechnica. Vol. 2. No. 4. Vol. 3, No. 1—3. Coimbra 1907. 08.

Rumänien.

Buletinul Societății de sciințe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucuresci-România. Anul 16, No. 5. 6. Anul 17, No. 1—4. Bucuresci 1908.

Rußland.

Meteorologisches Jahrbuch für Finland. Hsg. von der Meteorologischen Zentralanstalt. Bd. 1 (1901). Helsingfors 1908.

Observations météorologiques publ. par l'Institut météorologique central de la Societé des sciences de Finlande. 1897/98. Helsingfors 1908.

Bulletin de la Commission géologique de Finlande. No. 6—13. 19. Helsingfors 1899—1907. — *Sederholm, J. J*, Explanatory Notes to accompany a Geological Sketch-Map of Fenno-Scandia. ib. 1908.

Catalogue photographique du ciel. Zone de Helsingfors entre + 39° + 47°. Publ. par *Anders Donner*. Sér. I. T. 3. Helsingfors 1908.

Annales de l'Observatoire physique central. 1903. Suppl. 1904. Suppl. Irkoutsk 1906. 08.

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan. Ser. II. T. 15, No. 4. T. 16, No. 1. Kasan 1906. 08.

Učenyja zapiski Imp. Kasanskago Universiteta. T. 75, No. 1—6. 8—11. Kasan 1908.

Universitetskija Izvěstija. God 47, No. 10—12. God 48, No. 1—8. 10. Kiev 1906. 07.

Mitteilungen der Ukrainischen Gesellschaft der Wissenschaften. No. 1. Kiev 1908.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1907, No. 1—3. Moscou d. J.

Učenyja Zapiski Imp. Moskovskago Universiteta. Otděl jurid. Vyp. 24—31. — Otd. med. Vyp. 10—14. — Otd. istor.-filol. Vyp. 34—37. — Otd. estestvenno-istor. Vyp. 22. — Otd. fis.-mat. Vyp. 23. 24. Moskva 1904—08.

Beobachtungen, angestellt im Meteorologischen Observatorium der Kais. Universität Moskau i. d. J. 1903. 04. Moskau 1907.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. Sér. V. T. 25, No. 3—5. Sér. VI. No. 1—18. St. Petersbourg 1907. 08.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. Classe physico-mathématique. Sér. VIII. Vol. 17, No. 7. Vol. 18, No. 1—6. Vol. 19, No. 1—6. 8—11. Vol. 20. 21, No. 1. 2. Vol. 22. 23, No. 1. — Classe historico-philologique. Sér. VIII. Vol. 7, No. 8. Vol. 8. 9, No. 1. St. Petersbourg 1906—08.

Académie Impér. des sciences. Comptes rendus des séances de la commission de Sismique permanente. T. 2, Liv. 3. St. Petersbourg 1907.

Comité géologique. Bulletins. T. 25, No. 16. T. 26, No. 1—7. T. 27, No. 1—3. — Mémoires. N. Sér. No. 22. 28. 30. 32. 34. 35. 41. 42. S. Pétersbourg 1907. 08.

Acta Horti Petropolitani. T. 27, Fasc. 2. T. 28, Fasc. 1. T. 29, Fasc. 1. S. Peterburg 1908.

Publications de l'Observatoire physique central Nicolas. Ser. II. Vol. 16, Fasc. 1. Vol. 18, Fasc. 2. St. Pétersbourg 1907.

Trudy Imp. S.-Peterburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 36, Liv. 3. 4. S. Pétersbourg 1906. 07.

Izvěstija Imp. archeolog. Kommissii. Vyp. 6—24 (1904—07). — Pribavleniç K. Vyp. 6. 9. 10. 14. 16. 18. 19. 21. 22 (1903—07). — Otčet. Imp. archeol. Kommissii za 1901—04. — Materialy po Archeologii Rossii. No. 29. 30 (1903. 06). — Albom risnikov poměščennych v Otčetach Imp. archeol. Kommissii za 1882—98. — Ukazateli k Otčetam Imp. archeol. Komm. za 1882—98. S. Peterburg.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S. Petersburgskago Universiteta na 1907/08. 08/09. S. Peterburg 1907. 08.

Otčet o sostojanij i dějatelnosti Imp. S. Peterburgsk. Universiteta za 1907. S. Peterburg 1908.

Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg, entreprises en 1899—1901 sous les auspices des gouvernements Russe et Suédois. Mission Russe. Tom. 1. Sect. III. A. a. Tom. 2. Sect. IX. B. 1. St. Pétersbourg 1907.

Zapiski istoriko-filologičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgsk. Universiteta. Čast. 51. 86. 87. S. Peterburg 1899. 1907. 08.

Byzantina Xronika. T. 12. 13. 14, 1. S. Peterburg 1906. 07.

Oeuvres de *P. L. Tchebychef*, publ. par *A. Markoff* et *N. Sonin*. T. 2. S. Pétersbourg 1907.

Arbeiten des Naturforscher-Vereins zu Riga. N. Folge. H. 11. Riga 1908.

Seismische Monatsberichte des physikalischen Observatoriums zu Tiflis 1905, No. 10—12. 1907, No. 1—9.

Sprawozdania z posiedzén Towarzystwa naukowego Warszawskiego. Rok 1, Zesz. 1—5. Warszawa 1908.

Schweden und Norwegen.

Bergens Museum. Aarbog for 1907, H. 3. 1908, H. 1. 2. — Aarsberetning for 1907. Bergen 1908.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 5, P. 21. 22. Bergen 1908.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1907. Christiania 1908.

Skrifter udgivne a Videnskabs-Selskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1906. II. 1907. Hist.-filos. Kl. 1907. Kristiania 1908.

Eranos. Acta philologica Suecana. Vol. 7. 8, Fasc. 1—3. Göteborg 1907. 08.

Lunds Universitets Års-Skrift. N. Följd. Afd. II, 2. 3. Lund 1906—08

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler*. 31, 2—4. Stockholm 1908.

Arkiv för botanik, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 7, Stockholm 1908.

Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 3, H. 1. 2. Stockholm 1908.

Arkiv för mathematik, astronomi och fysik, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 4. Stockholm 1908.

Arkiv för zoologi, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 4. Stockholm 1908.

Kungl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 42, 10—12. Bd. 43, 1—6. Stockholm 1907. 08.

Kungl. Svensk. Vetenskaps Akademiens Årsbok för 1908. Uppsala, Stockholm.

Meddelanden från K. Vetenskaps Academiens Nobelinstitut. Bd. 1, No. 8—11. Uppsala et Stockholm 1907. 08.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, utg. af Kungl. Svenska Vetenskaps Akademien. Bd. 48. Bihang. Bd. 49 och Bihang. Stockholm 1907. 08.

Berättelser om Folsksskoloren i Riket för 1899—1904 afg. af till förordna de Folskoleinspektirer. I. II. Stockholm 1906.

Nordstedt, C. P. O., Index Desmidiacearum. Suppl. opus subsidiis Reg. Acad. scient. edit. Lundae, Berolini 1908.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 28 (1907). Uppsala.

Nordiska Museet Fataburen. 1907. H. 1—4. Stockholm 1908.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Bd. 8, No. 7. Bd. 9, No. 1. Stockholm 1908.

Tromsø Museums Aarshefter 25 (1902). Tromsø 1907. 08. — Aarsberetning for 1906. 07.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 39 (1907). Upsal 1908.

Bibliographia Linnaeana. Matériaux pour servir à une Bibliographie Linnéenne. Recueill. par *J. M. Hulth*. P. 1, Livr. 1. Uppsala. Berlin 1907.

Bref och skrifvelser af och till Carl von Linné med understöd af Svenska Staten utg. af Upsala Universitet. Afd. I. Deel 1. 2. Stockholm 1907. 08.

Linnéporträtt. Vid Uppsala Universitets minnesfest på 200-års-dagen af Carl von Linnés födelse. A Universitets vägnar af Tycho Tullberg. Stockholm 1907.

Zoologiska Studier tillägnade Prof. T. Tullberg på hans 65-års-dag. Uppsala 1907.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsal. Vol. 8 (1906. 07), No. 13. 14. Uppsala 1908.

Urkunder till Stockholms Historia I. Stockholms stads privilegielret 1423—1700. H. 3. Utg. af K. Humanistiska Vetenskaps-Samfundet. Stockholm s. a.

Staaff, Erik, Etude sur l'ancien dialecte Léonais. Utg. med understod af Vilhelm Ekmans Universitetsfond. Uppsala 1907.

Schweiz.

Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitäten 1906/07. 07/08. Basel 1907. 08. (2 Exemplare.)

Neue Denkschriften der Allgemeinen Schweizer. Gesellschaft für die ges. Naturwissenschaften (Nouveaux Mémoires de la Société Helvétique des sciences naturelles). Bd. 42, 1. Bd. 43. Basel, Zürich 1907.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg (1907). Aarau 1907. — Compte rendu de la session 86—89 de la Société helvétique des scienc. naturelles. S.-A. (Archives d. Genève 1907.)

Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd 7, H. 2. Bd. 8, H. 1. Basel 1908.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 19, H. 3. Basel 1908.

Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern a. d. J. 1907. No. 1629—1664. Bern 1908.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Bd. 50. Chur 1908.

Universität Freiburg, Schw. Verzeichnis der Vorlesungen. W.-S. 1907/08.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 35, P. 4. Genève 1907.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 9, No. 3. 4. Bd. 10, No. 1. 2. Zürich 1907. 08.

Schweizerisches Landesmuseum. 16. Jahresbericht (1907). Zürich 1908.

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Bd. 33. Zürich 1908.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 52. H. 3/4. Zürich 1908

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. N. F. Lief. 15. 21. 22. Bern 1907. 08.

Serbien.

Glas srpske kralj. Akademsja. 72—74. — Godišnjak. 20 (1906). — Spomenik. 45. — Sbornik za istor., jezik etc. (Istorijski Sbornik), Knj. 4. — Srpske Etnografski Zbornik. Knj. 7—9. — Crna gora za morejskog rata (1684—1699) od. *Job. H. Tomića.* Beograd 1906. 07.

Afrika.

Transactions of the South African Philosophical Society. Vol. 13. p. 547—752. Vol. 17, P. 2. 18, P. 2. 3. Cape Town 1908.

Geodetic Survey of South Africa. Vol. 5. London 1908.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1905. Vol. II. 1906, I. II. Washington 1907. 08.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 37. 38. Boston 1906. 07.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 28, No. 2. New Haven 1907.

The Astronomical and Astrophysical Society of America. 6. Meeting. (S.-A.) Philadelphia 1904.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 18. New York 1907.

Publications of the Alleghany Observatory. Vol. 1, No. 1—7. 9. S. l. e. a.

Maryland Geological Survey. Vol. 6. — Calvert County. St. Mary's County (with maps). — Weather Service. Vol. 2. Baltimore 1906. 07.

The Johns Hopkins University Circular. 1907, No. 7—9. 1908, No. 1—7. Baltimore 1907. 08.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 29, No. 4. Vol. 30, No. 1. 2. Baltimore 1907. 08.

American Journal of Philology. Vol. 28, No. 3. 4. Vol. 29, No. 1. 2. Baltimore 1907. 08.

American chemical Journal. Vol. 38, 39. Baltimore 1907. 08.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. 25, No. 6—12. Ser. 26, No. 1—10. Baltimore 1907. 08.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences. [Boston] Vol. 13, No. 6. Cambridge 1908.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 32, P. 3—12. Vol. 33, P. 3—9. Boston 1906. 07.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences Vol. 43, No. 7—22. Boston 1908.

The Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences. Science Bulletin. Vol. 1, No. 12. 13. Brooklyn 1908.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. No. 4. 8. Vol. 11. 43, No. 6. 48, No. 4. 49, No. 5. 6. 51, 7—12. 52, 2—5. 53, 1. 2. Cambridge, Mass. 1865—1908.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 1. 2. 34, No. 2. 35, No. 2. Cambridge, Mass. 1864—1908.

Annual Report of the Keeper of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College for 1862—68. 70. 71. 74. 76. 1907/08.

Agassiz, Alex., An Adress of the opening of the Geological Section of the Harvard University Museum, 1902. — *James, Will.*, Louis Agassiz: Words spoken at the reception of the American Society of naturalists by the President and Fellows of Harvard College, 1896. Cambridge, Mass.

Field Columbian Museum. Publications. No. 3. 121—128. Chicago 1895. 1907. 08.

The Botanical Gazette. Vol. 45, No. 1—5. Chicago 1908.

The John Crerar Library. Annual Report. 12. 13. Chicago 1907. 08.

University of Cincinnati Record. Ser. I. Vol. 3, No. 5—7. 8. 9. Vol. 4, No. 1. 4—9.

The University of Missouri Studies. Science Series. Vol. 2, No. 1. Columbia 1907. — Laws Observatory, University of Missouri. No. 8—10. 13. 14. Columbia 1908.

Jowa Geological Survey. Vol. 17. Ann. Report for 1906. Des Moines 1907.

Proceedings of the Indiana Academy of sciences. 1906. 07. Indianapolis 1907. 08.

Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. II. Vol. 14, No. 4—10. Vol. 15, No. 1—3. Lancaster 1907. — Annual Register. New York 1908. — International Association for promoting the study of Quaternions and allied systems of Mathematics. March 1908.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 9, No. 1—4. Lancaster and New York 1908.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 15, P. II. Madison 1907.

Wisconsin Geological and Natural History Survey. Bulletin, No. 16—18 Madison 1907.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 24, Cuad. 10—12. T. 25, Cuad. 1—3. T. 26, Cuad. 1—9. México 1907. 08.

Bulletin of the Wisconsin Natural History Society. N. S. Vol. 1, No. 1. 4. Vol. 2, No. 4. Vol. 6, No. 1. 2. Milwaukee 1900—08.

Lick Observatory, University of California. [Mount Hamilton.] Bulletin. No. 125—128. 130—137. 140—143. — Publications of the Lick Observatory. Vol. 10. Sacramento 1907. 08.

Vanderbilt University Studies: *Tolman, H. C.* The Behistan Inscription of King Darius. Nashville, Tenn. 1908.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 13, p. 299—548. Vol. 14, p. 1—57. New Haven 1908.

Nabuco, Joaq., The spirit of Nationality in the History of Brazil. Adress deliv. before the Spanish Club of Yale University. New Haven 1908.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 17, P. 3. Vol. 18, P. 1. 2. New York 1907. 08.

American Museum of Natural History. Bulletin. Vol. 15, P. 2. Vol. 23. 25. — Memoirs. Vol. 3, P. 4. Vol. 9, P. 4. Vol. 10. 14, P. 2. Anthropological Papers Vol. 1, P. 4. 6. — Annual Report for 1907. New York 1907. 08. — Morris Ketchum Jesup. ib. 1908.

The American Museum Journal. Vol. 8, No. 1—8. — The Foyer Collection of meteorites. Ed. by *Edm. Otis Hoven*. New York 1908.

American Geographical Society. Bulletin. Vol. 39, No. 12. Vol. 40, No. 1—11. New York 1906. 07.

Supplementary Papers of the America-School of classic studies in Roma. Vol. 2. New York 1908.

Studies from the Rockefeller Institute of Medical Researche. Vol. 7. 8. (New York) 1907. 08.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 11, No. 4. Suppl. Vol. 12, No. 1—3. Norwood Mass. 1907. 08.

Oberlin College. The Wilson Bulletin. N. S. Vol. 14, No. 3. 4. Vol. 15, No. 1—3. Oberlin, Ohio 1907. 08.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. General Index. Ser. I and II (1882—1906). Ser. II. Vol. 12. Suppl. Ser. III. Vol. 1. Ottawa 1906. 07.

Canada's fertile Northland. Ed. by *Ernest J. Chambers*. Ottawa 1908.

Geological Survey of Canada. No. 923. 939. 949. 953. 958. 959. 968. 971. 977. 979. 982. 986. 988. 992. 996. 1017. 1028. — Annual Report. Vol. 16 (with maps). — General Index to Reports, 1885—. 1906. — The Fall at Niagara. Ottawa 1907. 08.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Vol. 59, P. 2. 3. Vol. 60, P. 1. 2. Philadelphia 1907. 08.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. No. 187—189. Philadelphia 1907. 08.

Transactions of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. N. S. Vol. 21, No. 4. 5. Philadelphia 1907. 08.

The Journal at comparative Neurology. Vol. 18, No. 1—4. Philadelphia 1908.

Proceedings of the California Academy of Sciences. Vol. 1, p. 1—6. Vol. 3, p. 1—40. San Francisco 1907. 08.

Transactions of the Academy of Science of St. Louis. Vol. 16, 8. 9. 17, 1. 2. 18, 1. St. Louis 1907. 08.

Transactions of the Kansas Academy of science. Vol. 21, P. I. Topeka 1908.

University of Toronto Studies: Biological Series. No. 6. — Geological Series. No. 5. — History. Ser. I. Vol. 3. Review of Historical Publications relating to Canada for 1898 y Vol. 12. — History and Economics. Vol. 2, No. 4. — Papers from the chemical Laboratories. No. 59. 66—70. 72. — Papers from the Physical Laboratories. No. 22—23. — Physiological Series. No. 4—6. — Psychological Series. No. 4. Vol. 3, No. 1. Toronto 1899—1908.

The Journal of the Roy. Astronomical Society of Canada. Vol. 1, No. 5. 6. Vol. 2, No. 1—5. Toronto 1907. 08.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 8, No. 1. Urbana 1908.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1906. Vol. 1. 2. Washington 1907. 08.

Bulletin of the Bureau of Standards. Vol. 4. 5, No. 1. 2. Washington 1907. 08.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1741. 1791. 1803—1805. 1810 1811. — Quarterly Issue. Vol. 4, P. 4. Vol. 5, P. 1. Washington 1907. 08.

Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1692. 1723. 1739. Washington 1907.

Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin. 33. 35. — Report of the U. S. National Museum 1906/07.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for 1905/06. Washington 1907.

Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. Vol. 2. Washington 1908.

Classified List of Smithsonian Publications. Washington 1908.

Synopsis of the Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for 1906/07. Washington 1907.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1906, to June 30, 1907. — Bulletin. No. 40. III and IV edit. No. 41. — Supplement to the List and Catalogue of the Publications. 1903—1908. Washington 1901—08.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey. Geological Atlas of the U. S. No. 141—150. — Professional Papers. No. 56. 62. Washington 1906. 07.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 309. 316. 319. 321. 322. 325—340. 342—346. 348. 350. — Water Supply and Irrigation Papers. No. 207. 209—218. Washington 1907. 08.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 28. 1906/1907. Washington 1907.

Monographs of the U. S. Geological Survey. 49. Washington 1907.

Mineral Resources of the U. S. 1906. Washington 1907.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 63, Entr. 4. 5. T. 64, 65. 66, Entr. 1. Buenos Aires 1907. 08.

Boletin del Cuerpo de Ingenieros de minas del Perú. No. 56—62. Lima 1907. 08.

Anales del Museo nacional de Montevideo. Vol. 6. Flora Uruguaya. T. 3. Fasc. 3. Montevideo 1908.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1908. (Anno 24.) Rio de Janeiro 1908.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1907, Jan. bis Junho. Rio de Janeiro 1907.

Archivos do Museu nacional do Rio de Janeiro. Vol. 13. Rio de Janeiro 1905.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 17, 1—5. Santiago 1907.

Revista da Sociedade scientifica de São Paulo. No. 3. 4. Vol. 2, No. 1—8. São Paulo 1906. 07.

Asien.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 28. — Regenwaarnemingen in Neth. India. Jaarg. 28 1906. Batavia 1907.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de kgl. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 67 Weltevreden, Amsterdam 1908.

Verbeek, R. D. M., Rapport sur les Moluques (Edit. franç. du Jaarbook von het Mijnwezen in Nederl. Oost-Indie. T. 37, avec Atlas). Batavia 1908.

Linguistic Survey of India. Vol. 9, P. 3. — Pag Sam Jon Zang. Ed. by *Sarat Chandra Das*. Calcutta 1907. 08.

Indian Museum. Aunual Report. 1906/07.

Memoirs of the Indian Museum. Vol. 1, No. 2. Calcutta 1908.

Records of the Indian Museum (A Journal of Indian Zoology) Vol. 1, P. 4. Vol. 2, P. 1. Calcutta 1907. 08.

Köhler, R. A., Account of the Littoral Holothurioidea collect. by the „Investigator". Calcutta 1908.

A Sketch of the Geography and Geology of the Himalaya Mountains and Tibet. By *S. G. Burrard* and *H. H. Hayden*. P. 1—3. Calcutta 1907.

The Tōkyō Imp. University Calendar. 2567/68 (1907/08). Tōkyō 1908.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. 21, 8. 12. Vol. 23, 2—14. Vol. 24. 25, No. 1—19. Tōkyō 1907. 08.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 7, No. 3. 4. Tokio 1907. 08.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 6, P. 3. 4. Tokyo 1907. 08.

Publications of the Earthquake Investigation Committee in foreign languages. No. 22 A, 22 C. Tokyo 1908.

Bulletin of the Imp. Earthquake Investigation Committee. Vol. 2, No. 1. 2. Tokyo 1908.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. S. Vol. 12, I. 19, II. 20, II. 21, I. Melbourne 1899—1908.

Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales. Vol. 37—41. Sydney, 1904—1908.

---

2. Einzelne Schriften.

Bibliographie des travaux de Godefroid Kurth 1863—1908. S.-A. Liège, Paris 1908.

Drescher, Ad., Der Aufbau des Atoms und das Leben. Gießen 1908.

Felix, Joh., Studien über die Schichten der oberen Kreideformation in den Alpen und den Mediterrangebieten. T. 1. 2. S.-A. Stuttgart 1903. 08.

Frentzen, Aug., Die wahre Ursache der Ebbe und Flut nicht Mondanziehung, sondern Sonnenwärme; o. J. u. O.

Grigoras, Eman., La Bialgebre. Bucarest 1908.

Helmert, F. R., Trigonometrische Höhenmessung und Refraktionskoeffizienten in der Nähe des Meeresspiegels. S.-A. Berlin 1908.

Jelinek, Ludw., Kritische Geschichte der modernen Philosophie. — Elementare Metaphysick (sic!). (Berlin 1908).

Kromphardt, G. Fred., Die Welt als Widerspruch. 2. Aufl. New York 1907.

Leyst, F., 5 S.-A. meteorologischen Inhalts aus Bulletin des naturalistes de Moscou, 1906.

Sauvage, C., Le Professeur David Carazzi, les huitres de Marennes et la Diatomée bleue. Bordeaux 1908.

See, T. J. J., Further Researches on the Physics of the Earth. S.-A. (Boston) 1908.

Svoronos, D. E., Die Münzen der Ptolemaeer. Bd. 4. Athen 1908.

Velics, Anton von, Onomatopöie und Algebra. Budapest 1908. (09).

Weber, K. D., O koreskom jazykě i koreanskom čtenin kitajskich ieroglifor. — Probnaja transkripcii nasvanii vsěch goradov korei. — Imp. Russk. Geograf. Obščestvo. kartograf. kommiss. 1907.

Woitsch, L., Aus den Gedichten Po-Chii-J's. — Einige Hsich-Hou-Yii — Peckinger Suhua. T 1. Pecking 1908.

INHALT.

Seite

Martin Krause, Nekrolog auf Gustav Zeuner, vorgelegt in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908 339

O. Hölder, Nekrolog auf Adolph Mayer, gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908 353

C. Neumann, Nekrolog auf Wilhelm Scheibner, gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908 375

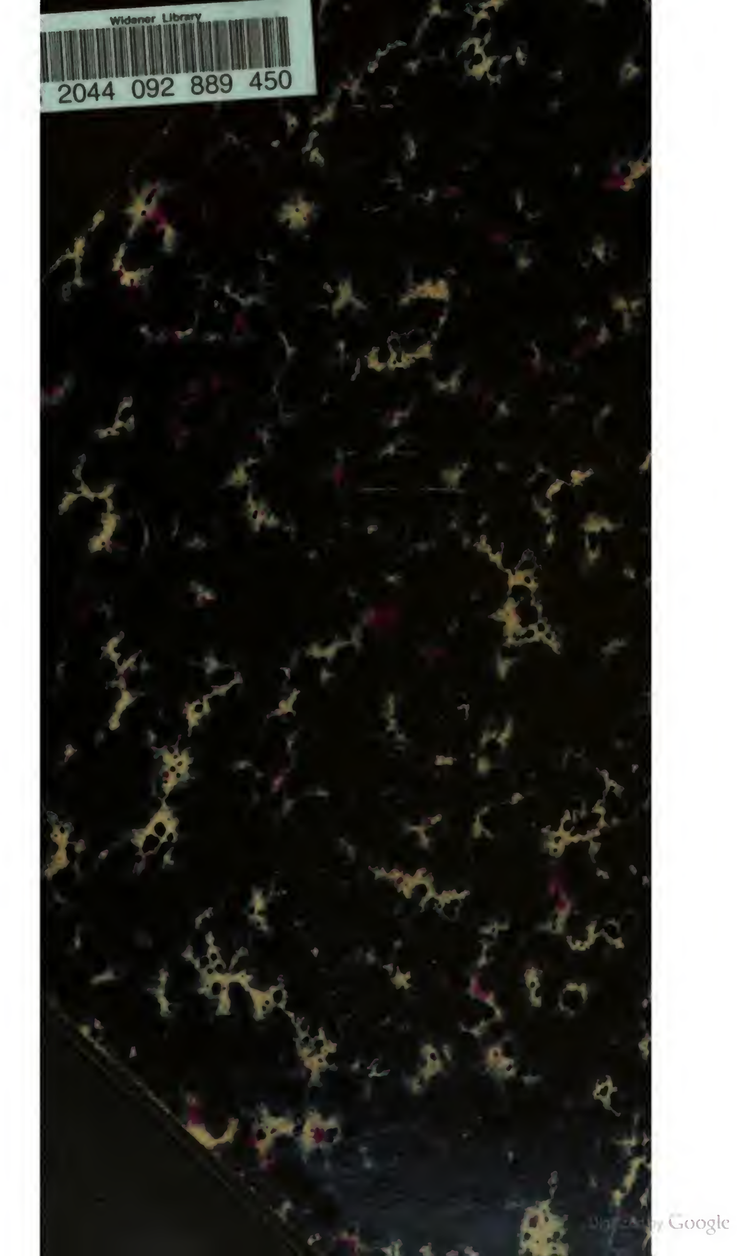
Verzeichnis der Mitglieder der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften I

Verzeichnis der eingegangenen Schriften VII

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.







Widener Library
2044 092 889 450